



M É M O I R E

S U R

QUELQUES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DES
QUANTITÉS TRANSCENDENTES CIRCULAIRES
ET LOGARITHMIQUES.

PAR M. L A M B E R T. *)

§. 1.

Démontrer que le diamètre du cercle n'est point à sa circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, c'est là une chose, dont les géomètres ne seront gueres surpris. On connoit les nombres de *Ludolph*, les rapports trouvés par *Archimede*, par *Métius* etc. de même qu'un grand nombre de suites infinies, qui toutes se rapportent à la quadrature du cercle. Et si la somme de ces suites est une quantité rationnelle, on doit assez naturellement conclure, qu'elle fera ou un nombre entier, ou une fraction très simple. Car, s'il y falloit une fraction fort composée, quelle raison y auroit-il, pourquoi plutôt telle que telle autre quelconque? C'est ainsi, par exemple, que la somme de la suite

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \&c.$$

est égale à l'unité, qui de toutes les quantités rationnelles est la plus simple. Mais, en omettant alternativement les 2, 4, 6, 8 &c. termes, la somme des autres

*) Lu en 1767.



$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \&c.$$

donne l'aire du cercle, lorsque le diamètre est $= 1$. Il semble donc que, si cette somme étoit rationnelle, elle devroit également pouvoir être exprimée par une fraction fort simple, telle que seroit $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$ &c. En effet, le diamètre étant $= 1$, le rayon $= \frac{1}{2}$, le quarré du rayon $= \frac{1}{4}$, on voit bien que ces expressions étant aussi simples, elles n'y mettent point d'obstacle. Et comme il s'agit de tout le cercle, qui fait une espèce d'unité, & non de quelque Secteur, qui de sa nature demanderoit des fractions fort grandes, on voit bien, qu'encore à cet égard on n'a point sujet de s'attendre à une fraction fort composée. Mais comme, après la fraction $\frac{1}{4}$ trouvée par *Archimede*, qui ne donne qu'un à peu près, on passe à celle de *Metius*, $\frac{3}{4} \frac{5}{3} \frac{5}{2}$, qui n'est pas non plus exacte, & dont les nombres sont considérablement plus grands, on doit être fort porté à conclure, que la somme de cette suite, bien loin d'être égale à une fraction simple, est une quantité irrationnelle.

§. 2. Quelque vague que soit ce raisonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas d'avantage. Mais ces cas ne sont pas celui de la quadrature du cercle. La plupart de ceux qui s'attachent à la chercher, le font avec une ardeur, qui les entraîne quelque fois jusqu'à révoquer en doute les vérités les plus fondamentales & les mieux établies de la géométrie. Pourroit-on croire, qu'ils se trouveroient satisfaits par ce que je viens de dire? Il y faut toute autre chose. Et s'agit-il de démontrer, qu'en effet le diamètre n'est pas à la circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, cette démonstration doit être si rigide, qu'elle ne le cede à aucune démonstration géométrique. Et avec tout cela je reviens à dire, que les géomètres n'en seront point surpris. Ils doivent être accoutumés depuis longtems à ne s'attendre à autre chose. Mais voici ce qui méritera plus d'attention, & ce qui fera une bonne partie de ce Mémoire. Il s'agit de faire voir, que toutes les fois qu'un arc de cercle quelconque est commensurable au rayon, la tangente de cet arc lui est in-

com-



commensurable; & que réciproquement, toute tangente commensurable n'est point celle d'un arc commensurable. Voilà de quoi être un peu plus surpris. Cet énoncé paroissoit devoir admettre une infinité d'exceptions, & il n'en admet aucune. - Il fait encore voir jusqu'à quel point les quantités circulaires transcendentes sont transcendentes, & reculées au delà de toute commensurabilité. Comme la démonstration que je vais donner exige toute la rigueur géométrique, & qu'en outre elle sera un tissu de quelques autres theorèmes, qui demandent d'être démontrés avec tout autant de rigueur, ces raisons m'excuseront, quand je ne me hâterai pas d'en venir à la fin, ou lorsque chemin faisant je m'arrêterai à ce qui se présentera de remarquable.

§. 3. Soit donc proposé *un arc de cercle quelconque, mais commensurable au rayon: & il s'agit de trouver, si cet arc de cercle sera en même tems commensurable à sa tangente ou non?* Qu'on se figure pour cet effet une fraction telle, que son numérateur soit égal à l'arc de cercle proposé, & que son dénominateur soit égal à la tangente de cet arc. Il est clair que, de quelque manière que cet arc & sa tangente soient exprimés, cette fraction doit être égale à une autre fraction, dont le numérateur & le dénominateur seront des nombres entiers, toutes les fois que l'arc de cercle proposé se trouvera être commensurable à sa tangente. Il est clair aussi que cette seconde fraction doit pouvoir être déduite de la première, par la même méthode, dont on se sert en arithmétique pour réduire une fraction à son moindre dénominateur. Cette méthode étant connue depuis *Euclide*, qui en fait la 2^{me} prop. de son 7^{me} Livre, je ne m'arrêterai pas à la démontrer de nouveau. Mais il convient de remarquer que, tandis que *Euclide* ne l'applique qu'à des nombres entiers & rationels, il faudra que je m'en serve d'une autre façon, lorsqu'il s'agit d'en faire l'application à des quantités, dont on ignore encore si elles seront rationelles ou non? Voici donc le procédé qui conviendra au cas dont il est ici question.

§. 4. Soit le rayon $\equiv r$, un arc de cercle proposé quelconque $\equiv v$. Et on aura les deux suites infinies fort connues



$$\sin v = v - \frac{1}{2 \cdot 3} v^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} v^7 + \&c.$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} v^6 + \&c.$$

Comme dans ce qui suivra je donnerai deux suites pour l'hyperbole qui ne différeront de ces deux qu'en ce que tous les signes sont positifs, je différencierai jusques-là de démontrer la loi de progression de ces suites, & encore ne la démontrerai-je que pour ne rien omettre de tout ce que demande la rigueur géométrique. Il suffit donc d'en avoir averti les Lecteurs d'avance.

§. 5. Or comme il est

$$\text{tang } v = \frac{\sin v}{\cos v},$$

nous aurons, en substituant ces deux suites, la fraction

$$\text{tang } v = \frac{v - \frac{1}{2 \cdot 3} v^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5 - \&c.}{1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 - \&c.}$$

Je la poserai pour plus de brièveté

$$\text{tang } v = \frac{A}{B},$$

de sorte qu'il soit

$$A = \sin v,$$

$$B = \cos v.$$

Voici maintenant le procédé que prescrit *Euclide*.

§. 6. On divise B par A; soit le quotient = Q', le résidu = R'.
 On divise A par R'; soit le quotient = Q'', le résidu = R''.
 On divise R' par R''; soit le quotient = Q''', le résidu = R'''.
 On divise R'' par R'''; soit le quotient = Q'V, le résidu = R'V. &c.
 de



de sorte qu'en continuant ces divisions, on trouve successivement

les quotiens $Q', Q'', Q''' \dots Q'', Q''+1, Q''+2 \dots \&c.$

les résidus $R', R'', R''' \dots R'', R''+1, R''+2 \dots \&c.$

& il est clair sans que j'en avertisse, que les exposans $n, n+1, n+2 \&c.$ ne servent qu'à indiquer le quantième quotient ou résidu est celui où ils se trouvent marqués. Ce qui étant posé, voici ce qu'il s'agit de démontrer.

§. 7. En premier lieu, *non seulement que la division peut être continuée sans fin, mais que les quotiens suivront une loi très simple en ce qu'il sera*

$$\begin{aligned} Q' &= + 1 : v, \\ Q'' &= - 3 : v, \\ Q''' &= + 5 : v, \\ Q^{IV} &= - 7 : v, \&c. \end{aligned}$$

Et en général

$$Q^n = \pm (2n - 1) : v,$$

où le signe $+$ est pour l'exposant n pair, le signe $-$ pour l'exposant n impair, Et que de la sorte on aura pour la tangente exprimée par l'arc la fraction continue très simple

$$\begin{aligned} \text{tang } v &= \frac{1}{1 : v - 1} \\ &\quad \frac{3 : v - 1}{5 : v - 1} \\ &\quad \frac{5 : v - 1}{7 : v - 1} \\ &\quad \frac{7 : v - 1}{9 : v - \&c.} \end{aligned}$$

§. 8. En second lieu, *que les résidus $R', R'', R''' \&c.$ seront exprimés par les suites suivantes, dont les loix de progression sont également fort simples:*

$$L1 \ 3$$

$$R' =$$



$$R' = - \frac{2}{2 \cdot 3} v^2 + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^4 - \frac{6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} v^6 + \&c.$$

$$R'' = - \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^3 + \frac{4 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} v^5 - \frac{6 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} v^7 + \&c.$$

$$R''' = + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot \dots \cdot 7} v^4 - \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot \dots \cdot 9} v^6 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{2 \cdot \dots \cdot 11} v^8 - \&c.$$

$$R^{IV} = + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot \dots \cdot 9} v^5 - \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{2 \cdot \dots \cdot 11} v^7 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{2 \cdot \dots \cdot 13} v^9 - \&c.$$

&c.

de sorte que les signes des premiers termes changent suivant l'ordre quaternaire — — + +, & qu'en général il sera

$$\pm R^n = - \frac{2^n (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n+1)} v^{n+1} + \frac{2^{n+1} (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n+3)} v^{n+3} - \&c.$$

$$\pm R^{n+1} = - \frac{2^{n+1} (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n+3)} v^{n+2} + \frac{2^{n+2} (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+2))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n+5)} v^{n+4} - \&c.$$

$$\pm R^{n+2} = + \frac{2^{n+1} (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+2))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n+5)} v^{n+3} - \frac{2^{n+3} (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+3))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n+7)} v^{n+5} + \&c.$$

§. 9. Or pour donner à la démonstration de ces théoremes toute la brièveté possible, considérons que chaque résidu R^{n+2} se trouve en divisant par le résidu R^{n+1} , qui le précède immédiatement, l'antépénultième R^n . Cette considération fait, que la démonstration, dont il s'agit peut être partagée en deux parties. Dans la première il faut faire voir que; si deux résidus R^n , R^{n+1} , qui se succèdent immédiatement, ont la forme que je leur ai donnée, le résidu R^{n+2} , qui suit immédiatement, aura la même forme. Ce qui étant une fois démontré, il ne reste plus que de faire voir, dans la seconde partie de la démonstration, que la forme des deux premiers résidus est celle qu'ils doivent avoir.

avoir. Car, de cette manière, il est évident que la forme de tous les suivans s'établit comme d'elle-même.

§, 10. Commençons donc par diviser le premier terme du résidu R^n par le premier terme du résidu R^{n+1} , afin d'avoir le quotient

$$Q^{n+2} = \frac{2^n (1.2.3 \dots n)}{1.2.3 \dots (2n+1)} v^{n+1} : \frac{2^{n+1} (1.2.3 \dots (n+1))}{1.2.3 \dots (2n+3)} v^{n+2}$$

$$= 1 : \frac{2(n+1)v}{(2n+2) \cdot (2n+3)} = (2n+3) : v.$$

Et il est clair que, le résidu R^{n+1} étant multiplié par ce quotient

$$Q^{n+2} = (2n+3) : v,$$

& le produit étant soustrait du résidu R^n , il doit rester le résidu R^{n+2} .

§. 11. Mais afin de n'avoir pas besoin de faire cette opération pour chaque terme séparément & de nous borner par là à une simple induction, prenons le terme général de chacune des suites qui expriment les résidus R^n , R^{n+1} , R^{n+2} , de sorte qu'en prenant le $m^{\text{tième}}$ terme des résidus R^n , R^{n+1} , nous prenions le $(m-1)^{\text{tième}}$ terme du résidu R^{n+2} . Ce qui étant observé, ces termes seront

$$\begin{aligned} \text{---} r^n &= \frac{2^{n+m-1} (m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \dots (n+m-1)) v^{n+2m-1}}{1.2.3.4 \dots (2n+2m-1)} \\ \text{---} r^{n+1} &= \frac{2^{n+m} \cdot (m \cdot (m+1) (m+2) \dots (n+m)) v^{n+2m}}{1.2.3.4 \dots (2n+2m+1)} \\ \text{---} r^{n+2} &= \frac{2^{n+m} \cdot ((m-1) \cdot m \cdot (m+1) \dots (n+m)) \cdot v^{n+2m-1}}{1.2.3.4 \dots (2n+m+1)} \end{aligned}$$

Or, puisqu'il doit être

$$r^n = r^{n+1} \cdot (2n+3) : v = r^{n+2},$$

& qu'en effet il est

$$\begin{aligned} r^n = r^{n+1} (2n+3) : v &= - \frac{2^{n+m-1} \cdot (m - \dots - (n+m-1)) v^{n+2m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+2m-1)} \\ &+ \frac{2^{n+m} \cdot (m - \dots - (n+m)) v^{n+2m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+2m+1)} \cdot \frac{2n+3}{v} \\ &= \frac{2^{n+m-1} \cdot (m - \dots - (n+m-1)) v^{n+2m-1}}{1 \cdot 2 \dots (2m+2m-2)} \cdot \left(-1 + \frac{2 \cdot (n+m) \cdot (2n+3)}{(2n+2m) \cdot (2n+2m+1)} \right) \\ &= - \frac{2^{n+m-1} \cdot (m - \dots - (n+m-1)) v^{n+2m-1}}{1 \cdot 2 \dots (2n+2m-2)} \cdot \frac{(2m-2) \cdot (2n+2m)}{(2n+2m) \cdot (2n+m+1)} \\ &= - \frac{2^{n+m} \cdot ((m-1) \cdot m(m+1) - \dots - (n+m)) v^{n+2m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+m+1)}, \end{aligned}$$

& partant

$$= \pm r^{n+2}.$$

On voit, que les résidus R^n, R^{n+1} ayant la forme que je leur ai donnée, le résidu R^{n+2} aura la même forme. Il ne s'agira donc plus, que de s'assurer de la forme des deux premiers résidus R', R'' , afin d'établir ce que cette première partie de notre démonstration avoit admis comme vrai en forme d'hypothèse. Et c'est ce qui fera la seconde partie de la démonstration.

§. 12. Souvenons-nous pour cet effet, que le premier résidu R' est celui qui reste en divisant le

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 - \dots - \frac{1}{1 \dots m} v^m - \dots \&c.$$

par le

$$\sin v = v - \frac{1}{2 \cdot 3} v^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5 - \dots - \frac{1}{1 \dots (m+1)} v^{m+1} - \dots \&c.$$

Or

Or le quotient qui résulte de la division du premier terme, étant $\equiv 1 : v$, on voit qu'il sera

$$R' \equiv \cos v - \frac{1}{v} \cdot \sin v.$$

Multipliant donc le terme général du diviseur,

$$\pm \frac{1}{1.2. \dots (m+1)} v^{m+1},$$

par $1 : v$, & soustrayant le produit

$$\pm \frac{1}{1.2. \dots (m+1)} \cdot v^m,$$

du terme général du dividende

$$\pm \frac{1}{1.2. \dots m} \cdot v^m,$$

on aura le terme général du premier résidu R'

$$r' \equiv \pm \frac{m \cdot v^m}{1 \dots (m+1)}.$$

Or $(m+1)$ étant toujours un nombre impair, m sera un nombre pair, & le premier résidu sera

$$R' \equiv -\frac{2}{2.3} v^2 + \frac{4}{2.3.4.5} v^4 - \frac{6}{2 \dots 7} v^6 + \dots$$

tel que nous l'avons supposé.

§. 13. Le second résidu R'' résulte de la division de

$$\sin v \equiv v - \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 - \dots \pm \frac{1}{1.2 \dots (m-1)} v^{m-1}$$

par le premier résidu que nous venons de trouver

$$R' \equiv -\frac{2}{2.3} v^2 + \frac{4}{2.3.4.5} v^4 - \frac{6}{2 \dots 7} v^6 + \dots \pm \frac{m v^m}{1 \dots (m+1)}$$



Or le quotient qui résulte de la division du premier terme, étant $= -3 : v$, on voit qu'il sera

$$R'' = \sin v - \frac{3}{v} \cdot R'.$$

Multipliant donc le terme général du diviseur

$$+ \frac{mv^m}{1 \dots (m+1)},$$

par $-3 : v$, & soustrayant le produit

$$+ \frac{3mv^{m-1}}{1 \dots (m+1)},$$

du terme général du dividende

$$+ \frac{1}{1 \dots (m-1)} v^{m-1},$$

le terme général du second résidu sera

$$\begin{aligned} r'' &= + \frac{v^{m-1}}{1 \dots (m-1)} - \frac{3mv^{m-1}}{1 \dots (m+1)} \\ &= + \frac{(m-2) \cdot m \cdot v^{m-1}}{1 \dots (m+1)}. \end{aligned}$$

Substituant donc pour m les nombres pairs, nous aurons le second résidu

$$R'' = - \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^3 + \frac{4 \cdot 6}{2 \dots 7} v^5 - \frac{6 \cdot 8}{2 \dots 9} v^7 + \&c.$$

encore tel que nous l'avons supposé. Ainsi la forme des deux premiers résidus étant démontrée, il s'ensuit, en vertu de la première partie de notre démonstration, que la forme de tous les résidus suivans l'est également.

§. 14. Maintenant il n'est plus nécessaire de démontrer séparément la loi de la progression des quotiens Q' , Q'' , Q''' &c. Car la loi des résidus étant démontrée, il est par là même démontré qu'un quotient quelconque sera (§. 10)



$$\pm Q^{n+1} = (2n + 3) : v,$$

ce qui, en vertu de la théorie des fractions continues, donne

$$\text{tang } v = \frac{1}{1 : v - 1} \cfrac{3 : v - 1}{5 : v - 1} \cfrac{7 : v - 1}{9 : v - 1} \cfrac{11 : v - 1}{\text{\&c.}}$$

d'où l'on voit en même tems, que toutes les fois que l'arc v sera égal à une partie aliquote du rayon, tous ces quotiens seront des nombres entiers croissans dans une progression arithmétique.

Et voilà ce qu'il faut observer, parce que dans le théoreme d'*Euclide* cité cy-dessus (§. 3.) tous les quotiens sont supposés être des nombres entiers. Ainsi jusques là la méthode que prescrit *Euclide*, sera applicable à tous ces cas, où l'arc v est une partie aliquote du rayon. Mais, encore dans ces cas, il s'y joint une autre circonstance qu'il convient de faire remarquer.

§. 15. Le probleme que propose *Euclide*, c'est de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers, qui ne sont pas premiers entre eux. Ce probleme est résolvable toutes les fois qu'un des résidus R' , R'' , R''' &c. - - - R^n devient $\equiv 0$, sans que le résidu précédent R^{n-1} soit égal à l'unité, ce qui suivant, la 1^{re} Prop. du même livre n'arrive que lorsque les deux nombres proposés sont premiers entre eux, bien entendu que tous les quotiens Q' , Q'' , Q''' &c. sont supposés être des nombres entiers. Or nous venons de voir, que cette dernière supposition a lieu dans le cas dont il s'agit ici, toutes les fois que $\frac{1}{v}$ est un nombre entier. Mais, quant aux résidus R' , R'' , R''' &c.

il n'y en a aucun qui devienne $\equiv 0$. Tout au contraire, en considé-



rant la loi de progression des résidus que nous venons de trouver, on voit, que non seulement ils décroissent sans interruption, mais qu'ils décroissent même plus fortement qu'aucune progression géométrique. Quoique donc cela continue à l'infini, nous pourrions néanmoins y appliquer la proposition d'*Euclide*. Car, en vertu de cette proposition, le plus grand commun diviseur de A, B , est en même tems le plus grand commun diviseur de tous les résidus R, R', R'' &c. Or ces résidus décroissant en sorte qu'enfin ils deviennent plus petits qu'aucune quantité assignable, il s'ensuit que le plus grand commun diviseur de A, B , est plus petit qu'aucune quantité assignable; ce qui veut dire qu'il n'y en a point, & que par conséquent A, B , étant des quantités incommensurables, la

$$\text{tang } v = \frac{A}{B}$$

sera une quantité irrationnelle toutes les fois que l'arc v sera une partie aliquote du rayon.

§. 16. Voilà donc à quoi se borne l'usage qu'on peut faire de la proposition d'*Euclide*. Il s'agit maintenant de l'étendre à tous les cas où l'arc v est commensurable au rayon. Pour cet effet, & pour démontrer encore quelques autres théoremes, je vais reprendre la fraction continue

$$\text{tang } v = \frac{1}{1 : v - 1} \frac{3 : v - 1}{5 : v - 1} \frac{7 : v - 1}{\text{\&c.}}$$

& en faisant $1 : v = w$, je la transformerai en

$$\text{tang } v = \frac{1}{w - 1} \frac{3w - 1}{5w - 1} \frac{7w - 1}{\text{\&c.}}$$



§. 17. Or, en retenant des quotiens $w, 3w, 5w$ &c. autant qu'on voudra on n'aura qu'à en faire la réduction, pour avoir des fractions qui exprimeront la tangente de v d'autant plus exactement qu'on aura retenu un plus grand nombre des quotiens. C'est ainsi p. ex. qu'en retenant 1, 2, 3, 4 &c. quotiens, on trouve les fractions

$$\frac{1}{w}, \frac{3w}{3w^2 - 1}, \frac{15w^2 - 1}{15w^3 - 6w}, \frac{105w^3 - 10w}{105w^4 - 45w^2 + 1},$$

§. 18. Mais, pour faire toutes ces réductions en ordre, & pour démontrer en même tems la loi de progression que ces fractions observent, nous poserons d'abord

$$\text{tang } v = \frac{1}{w-a} = \frac{1}{w-1} = \frac{1}{w-1} = \text{&c.}$$

$$\frac{3w-a'}{3w-1} \frac{5w-a''}{5w-1}$$

en exprimant par $a, a', a'', a''' \dots a^n, a^{n+1}, a^{n+2} \dots$ &c. les quantités qui résultent des quotiens qu'on voudra omettre, de sorte que pour les omettre on n'aura qu'à faire $a, a', a'', \dots a^n$ &c. $= 0$.

§. 19. Maintenant je dis, qu'en faisant $a^{n+1} = 0$, la fraction qui résulte de la réduction des quotiens qu'on retient, aura la forme

$$\text{tang } v = \frac{A - ma^n}{B - pa^n},$$

dans laquelle m, n, A, B ne sont point affectées de a^n . Supposons d'abord cette forme comme véritable, & on démontrera sans peine qu'en retenant encore un quotient de plus, la fraction qui résulte de la réduction, aura la même forme. Car comme il est

$$a^n = \frac{1}{(2n+1)w - a^{n+1}},$$

on n'aura qu'à substituer cette valeur dans la forme proposée, & elle se changera en

$$\text{tang } v = \frac{A(2n+1)w - m - A \cdot a^{n+1}}{B(2n+1)w - m - B \cdot a^{n+1}},$$

Comme cette forme est la même, il suffira de faire voir qu'elle est véritable pour le membre a' , puisqu'alors elle sera véritable pour tous les membres suivans a'' , a''' , a^{IV} . . . &c. Or pour le membre a' il est

$$\text{tang } v = \frac{1}{\frac{w-1}{3w-a'}}$$

ce qui en faisant la réduction donne

$$\text{tang } v = \frac{3w - a'}{3w^2 - 1 - wa'},$$

la forme telle que nous l'avons supposée.

§. 20. Ayant donc trouvé

$$\text{tang } v = \frac{A - ma^n}{B - pa^n}$$

$$\text{tang } v = \frac{A(2n+1)w - m - A \cdot a^{n+1}}{B(2n+1)w - m - B \cdot a^{n+1}},$$

substituons encore pour a^{n+1} sa valeur

$$a^{n+1} = \frac{1}{(2n+3)w - a^{n+2}},$$

& nous aurons

$$\text{tang } v = \frac{[A(2n+1)w - m] \cdot (2n+3w) - A - [A(2n+1)w - m] \cdot a^{n+2}}{[B(2n+1)w - p] \cdot (2n+3w) - B - [B(2n+1)w - p] \cdot a^{n+2}}.$$

§. 21. Donc, en faisant dans chacune de ces trois valeurs de $\text{tang } v$, égales à zéros, les membres a^n , a^{n+1} , a^{n+2} , nous aurons la forme générale des fractions, qu'il s'agit de trouver.

$$\frac{A}{B},$$

$$\frac{A (2n + 1) w - m}{B (2n + 1) w - p},$$

$$\frac{[A (2n + 1) w - m] \cdot (2n + 3) w - A}{[B (2n + 1) w - p] \cdot (2n + 3) w - B}.$$

Ces trois fractions étant pour l'omission de a^n , a^{n+1} , a^{n+2} , elles se suivent immédiatement, & on voit sans peine *que la troisieme se trouve moyennant les deux précédentes, en sorte que son numérateur & son dénominateur peut être calculé séparément.* Car le numérateur de la seconde fraction doit être multiplié par le quotient qui répond à a^{n+1} , & du produit on soustrait le numérateur de la premiere fraction. Le reste fera le numérateur de la troisieme fraction. Son dénominateur se trouve de la même maniere par les dénominateurs des deux fractions précédentes.

§. 22. *Pour avoir maintenant les fractions elles-mêmes, on n'aura qu'à écrire en trois colonnes les quotiens, avec les numérateurs & les dénominateurs des deux premieres fractions (§. 17.) & les numérateurs & les dénominateurs suivans se trouveront par l'opération facile que nous venons d'indiquer. En voici le type*

Quotiens	numérateurs	dénominateurs
	1 - - - - -	w
$5w$	$3w$ - - - - -	$3w^2 - 1$
$7w$	$15w^2 - 1$ - - -	$15w^3 - 6w$
$9w$	$105w^3 - 10w$ - -	$105w^4 - 45w^2 + 1$
$11w$	$945w^4 - 105w^2 + 1$	$945w^5 - 420w^3 + 15w$
&c.	$10395w^5 - 1260w^3 + 21w$	$10395w^6 - 4725w^4 + 210w^2 - 1$
	&c.	&c.

Ce qui donne les fractions

$$\frac{1}{w}, \frac{3w}{3w^2 - 1}, \frac{15w^2 - 1}{15w^3 - 6w}, \frac{105w^3 - 10w}{105w^4 - 45w^2 + 1} \&c.$$

dont chacune exprime plus exactement la tangente de ν , que celles qui la précèdent.

§. 23. Or, quoique moiennant la règle que nous venons de donner (§. 21.), chacune de ces fractions peut être trouvée par les deux qui la précèdent immédiatement, *il conviendra, pour éviter encore ici une espèce d'induction, d'en donner & d'en démontrer l'expression générale.* Commençons d'abord par remarquer, que les coefficients de chaque colonne verticale suivent une loi fort simple en ce que leurs facteurs sont en partie des nombres figurés & en partie des nombres impairs. Les voici résolus

Fraction	Quotient	Dénominateur
1 ^{re}		w
2 ^{de}	$5w$	$3 \cdot w^2 - 1 \cdot 1$
3 ^{me}	$7w$	$3 \cdot 5 \cdot w^3 - 2 \cdot 3 \cdot w$
4 ^{me}	$9w$	$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot w^4 - 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot w^2 + 1 \cdot 1$
5 ^{me}	$11w$	$3 \cdot \cdot 9 \cdot w^5 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot w^3 + 3 \cdot 5 \cdot w$
6 ^{me}	$13w$	$3 \cdot \cdot \cdot 11 \cdot w^6 - 5 \cdot 3 \cdot \cdot 9 \cdot w^4 + 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot w^2 - 1 \cdot 1$
7 ^{me}	$15w$	$3 \cdot \cdot \cdot \cdot 13 \cdot w^7 - 6 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot 11 \cdot w^5 + 10 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot w^3 - 4 \cdot 7 \cdot w$
&c.	&c.	&c.

Fraction	Quotient	Numérateur
1 ^{re}		1
2 ^{de}	$5w$	$3 \cdot w$
3 ^{me}	$7w$	$3 \cdot 5 \cdot w^2 - 1 \cdot 1$
4 ^{me}	$9w$	$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot w^3 - 2 \cdot 5 \cdot w$
5 ^{me}	$11w$	$3 \cdot \cdot 9 \cdot w^4 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot w^2 + 1 \cdot 1$
6 ^{me}	$13w$	$3 \cdot \cdot \cdot 11 \cdot w^5 - 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot w^3 + 3 \cdot 7 \cdot w$
7 ^{me}	$15w$	$3 \cdot \cdot \cdot \cdot 13 \cdot w^6 - 5 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot 11 \cdot w^4 + 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot w^2 - 1 \cdot 1$
&c.	&c.	&c.

§. 24.



§. 24. Cette observation nous facilite le moyen de trouver pour une des fractions quelconque l'expression générale. Soit proposée la $n^{\text{ième}}$ de ces fractions, & nous aurons son

Dénominateur

$$\begin{aligned}
 &= w^n [1.3.5.7 \dots (2n-1)] - \frac{w^{n-2}}{2} [(2n-2).1.3.5.7 \dots (2n-3)] \\
 &+ \frac{w^{n-4}}{2.3.4} [(2n-4).(2n-6).1.3.5 \dots (2n-5)] \\
 &- \frac{w^{n-6}}{2.3.4.5.6} [(2n-6).(2n-8).(2n-10).1.3.5 \dots (2n-7)] \\
 &+ \frac{w^{n-8}}{2.3.4.5.6.7.8} [(2n-8).(2n-10).(2n-12).(2n-14).1.3.5.7 \dots (2n-9)] \\
 &- \&c.
 \end{aligned}$$

Numérateur

$$\begin{aligned}
 &= w^{n-1} [1.3.5.7 \dots (2n-1)] - \frac{w^{n-3}}{2.3} [(2n-4).1.3.5.7 \dots (2n-3)] \\
 &+ \frac{w^{n-5}}{2.3.4.5} [(2n-6).(2n-8).1.3.5.7 \dots (2n-5)] \\
 &- \frac{w^{n-7}}{2.3.4.5.6.7} [(2n-8).(2n-10).(2n-12).1.3.5.7 \dots (2n-7)] \\
 &+ \frac{w^{n-9}}{2.3.4.5.6.7.8.9} [(2n-10).(2n-12).(2n-14).(2n-16).1.3.5.7 \dots (2n-9)] \\
 &- \&c.
 \end{aligned}$$

Il ne s'agit donc plus que d'en démontrer l'universalité.

§. 25. C'est ce qui se fera en sorte qu'en admettant cette forme pour la $n^{\text{ième}}$ fraction, on en déduit celle de la $(n-1)^{\text{ième}}$ & de la $(n-2)^{\text{ième}}$, en substituant $(n-1)$, $(n-2)$ au lieu de n . Ensuite on procède conformément à la règle du §. 21. en déduisant tant le dé-



nominateur que le numérateur de la $n^{\text{tième}}$ fraction, de ceux des deux fractions précédentes tels qu'on vient de les trouver par la première opération. Et par là on doit reproduire la forme de la $n^{\text{tième}}$ fraction, telle que nous venons de la donner. On voit bien que ce procédé aboutit à établir, que si deux fractions qui se suivent immédiatement ont cette forme, celle qui les suit, l'aura également, & que par conséquent, les fractions de la table précédente, qui sont les premières, ayant cette forme, il s'ensuivra, que toutes les suivantes l'auront également.

§. 26. Si donc, pour abrégé cette démonstration, nous voulons nous en tenir au terme général, il faudra néanmoins calculer séparément celui du numérateur & celui du dénominateur, ne fut-ce que pour simplifier le calcul. Car du reste l'un & l'autre se calculera suivant la même règle (§. 21.). Commençons par le *dénominateur*, & en prenant le $n^{\text{tième}}$ terme de son expression générale pour la $n^{\text{tième}}$ fraction, il faudra également prendre le $m^{\text{tième}}$ terme pour la $(n-1)^{\text{tième}}$ fraction, mais on ne prendra que le $(m-1)^{\text{tième}}$ terme pour la $(n-2)^{\text{tième}}$ fraction. On voit qu'il faut en agir de la sorte par rapport aux dimensions ou aux exposans de la lettre w .

§. 27, Or le $m^{\text{tième}}$ terme de la $n^{\text{tième}}$ fraction pour le dénominateur est

$$M = \frac{w^{n-2m+2} \cdot [(2n-2m+2) \cdot (2n-2m) \cdot (2n-2m-2) \cdots (2n-4m+6)] \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2m+1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2m-2)}$$

d'où, en substituant $(n-1)$ au lieu de n , on trouve le $m^{\text{tième}}$ terme de la $(n-1)^{\text{tième}}$ fraction

$$M' = \frac{w^{n-2m+1} \cdot [(2n-2m) \cdot (2n-2m-2) \cdots (2n-4m+4)] \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2m-2)}$$

Et en substituant $(n-2)$ au lieu de n , & $(m-1)$ au lieu de m , on trouve le $(m-1)^{\text{tième}}$ terme de la $(n-2)^{\text{tième}}$ fraction.



$$M'' = \frac{w^{n-2m+2} \cdot [(2n-2m) \cdot (2n-2m-2) \cdots (2n-4m+6)] \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2m-4)}$$

Or par la règle du §. 21. il doit être

$$M = (2n - 1) w \cdot M' - M''$$

ce qui fait que nous pourrions débarrasser ces trois expressions de tous les facteurs, qui leur sont communs, en les posant $= P$. Par là nous aurons

$$+ M = \frac{P \cdot w \cdot (2n - 2m + 2) \cdot (2n - 2m + 1)}{(2m - 2) \cdot (2m - 3)}$$

$$+ M' = \frac{P \cdot (2n - 4m + 4)}{(2m - 2) \cdot (2m - 3)}$$

$$- M'' = P \cdot w.$$

Ou en faisant

$$\frac{P}{(2m - 2) \cdot (2m - 3)} = Q,$$

il fera

$$+ M = Qw \cdot (2n - 2m + 2) \cdot (2n - 2m + 1)$$

$$+ M' = Q \cdot (2n - 4m + 4)$$

$$- M'' = Qw \cdot (2m - 2) \cdot (2m - 3).$$

De là, en multipliant actuellement, on aura

$$(2n - 1) w M' = Qw \cdot (4n^2 - 8nm + 6n + 4m - 4)$$

$$- M'' = Qw \cdot (4m^2 - 10m + 6);$$

donc

$$(2n - 1) w M' - M'' = Qw (4n^2 - 8nm + 6n + 4m^2 - 6m + 2).$$

Mais il est aussi

$$M = Qw \cdot (2n - 2m + 2)(2n - 2m + 1) = Qw (4n^2 - 8nm + 6n + 4m^2 - 6m + 2).$$

Donc ces deux valeurs étant les mêmes, on voit qu'il est

$$M = (2n - 1) w \cdot M' - M'',$$



& que par conséquent la forme, que nous avons donnée au terme général est telle qu'elle doit être.

§. 28. Passons maintenant au *numérateur*. Le $m^{\text{ième}}$ terme du numérateur de la $n^{\text{ième}}$ fraction doit être

$$+N = \frac{w^{n-2m+1} \cdot [(2n-2m) \cdot (2n-2m-2) \dots (2n-4m+4)] \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-2m+1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2m-1)}$$

d'où, en substituant $(n-1)$ au lieu de n , on aura le même $m^{\text{ième}}$ terme pour la $(n-1)^{\text{ième}}$ fraction,

$$+N' = \frac{w^{n-2m} \cdot [(2n-2m-2) \cdot (2n-2m-4) \dots (2n-4m+2)] \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-2m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2m-1)}$$

Et en substituant $(n-2)$, $(m-1)$, au lieu de n , m , on aura le $(m-1)^{\text{ième}}$ terme de la $(n-2)^{\text{ième}}$ fraction,

$$-N'' = \frac{w^{n-2m+1} \cdot [(2n-2m-2) \cdot (2n-2m-4) \dots (2n-4m+4)] \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-2m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2m-3)}$$

Donc, en posant les facteurs communs à ces trois expressions $= P$, nous aurons

$$+N = \frac{Pw \cdot (2n-2m) \cdot (2n-2m+1)}{(2m-1) \cdot (2m-2)}$$

$$+N' = \frac{P \cdot (2n-4m+2)}{(2m-1) \cdot (2m-2)}$$

$$-N'' = Pw,$$

ou en faisant $P = Q \cdot (2m-1) \cdot (2m-2)$, il sera

$$+N = Qw \cdot (2n-2m) \cdot (2n-2m+1)$$

$$+N' = Q \cdot (2n-4m+2)$$

$$-N'' = Qw \cdot (2m-1) \cdot (2m-2)$$

Mais il doit être

$$N = (2n-1)w \cdot N' - N'',$$

donc

donc, en substituant les valeurs trouvées, on aura

$$(2n-1)w N' = Qw \cdot (4n^2 - 8nm + 2n + 4m - 2) \\ - N'' = Qw (4m^2 - 6m + 2),$$

donc

$$(2n-1)w N' - N'' = Qw (4n^2 - 8nm + 2n + 4m^2 - 2m).$$

Or la même valeur résulte de

$$N = (2n - m) \cdot (2n - 2m + 1) \cdot Qw.$$

Il s'en suit donc de là, que la forme du terme général est telle qu'elle doit être.

§. 29. Reprenons donc les expressions générales que nous avons données au §. 24. & divisons celle du dénominateur par son premier terme, & nous aurons la suite

$$1 - \frac{w^2}{2} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} + \frac{w^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(2n-4) \cdot (2n-6)}{(2n-1) \cdot (2n-3)} - \frac{w^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{(2n-6) \cdot (2n-8) \cdot (2n-10)}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5)} \\ + \frac{w^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \frac{(2n-8) \cdot (2n-10) \cdot (2n-12) \cdot (2n-14)}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot (2n-7)} - \&c.$$

ce qui, en substituant $v = w^2$, & en posant $n = \infty$, donne

$$1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \&c.$$

qui est le cosinus de v , & par conséquent le dénominateur dont nous nous sommes servis (§. 5.) pour trouver les quotiens w , $3w$ &c.

§. 30. Divisons encore l'expression générale du numérateur (§. 24.) par le même premier terme du dénominateur, & nous aurons la suite

$$w^{-1} - \frac{w^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2n-4}{2n-1} + \frac{w^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(2n-6) \cdot (2n-8)}{(2n-1) \cdot (2n-3)} \\ - \frac{w^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{(2n-8) \cdot (2n-10) \cdot (2n-12)}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5)} \\ + \&c.$$

Nn 3

Ce



Ce qui encore donne pour $n = \infty$, la suite

$$v - \frac{1}{2 \cdot 3} v^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5 - \&c.$$

qui est $= \sin v$, & partant le numérateur, dont nous nous sommes servis §. 5.

§. 31. On voit encore par là, que, quelque grand que puisse être le premier terme des deux formules générales (§. 24.) le second terme, & encore plus les suivans, seront non seulement plus petits, mais même plus petits que la $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2 \cdot 3}$, $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ &c. partie du premier terme.

Mais, en substituant pour n successivement 1, 2, 3, 4 &c. à l'infini, le premier terme, comme étant le produit d'autant des nombres impairs 1. 3. 5. 7 &c. croîtra plus fortement qu'aucune progression géométrique croissante; on voit encore que, quoique le 2, 4, 6 &c. terme soit soustraictif, cela n'empêche pas que la somme des termes ne croisse plus fortement qu'aucune progression géométrique croissante. Et c'est ce que j'observe ici, parce que j'en ferai usage dans la suite de ce Mémoire. En voici d'abord un, qui se présente.

§. 32. Il s'agit de déterminer la loi, suivant laquelle les fractions

$$\frac{1}{w}, \frac{3w}{3w^2 - 1}, \frac{15w^2 - 1}{15w^3 - 6w}, \&c.$$

approchent de la valeur de la tangente? Pour cet effet, nous n'aurons qu'à soustraire chacune de celle qui la suit, & les résidus seront

$$\frac{1}{w \cdot (3w^2 - 1)}, \frac{1}{(3w^2 - 1) \cdot (15w^3 - 6w)}, \&c.$$

Ces résidus font voir de combien chacune des fractions est plus grande que celle qui la précède. Mais faisons voir généralement que tous les numérateurs sont $= 1$, & que tous les dénominateurs sont le produit de ceux des deux fractions dont ces résidus marquent la différence.

§. 33.



§. 33. Pour cet effet, nous reprendrons les trois formules générales que nous avons données au §. 21. & qui sont

$$\frac{A}{B},$$

$$\frac{A (2n + 1) w - m}{B (2n + 1) w - p},$$

$$\frac{[A (2n + 1) w - m] (2n + 3) w - A}{[B (2n + 1) w - p] (2n + 3) w - B}.$$

Or, soustrayant la première de la seconde, le résidu sera

$$= \frac{Ap - Bm}{B \cdot [B (2n + 1) w - p]}.$$

Mais le numérateur de ce résidu est le même qui résulte de la soustraction

$$\frac{A}{B} - \frac{m}{p} = \frac{Ap - Bm}{B \cdot p}.$$

Or $\frac{m}{p}$ étant la fraction qui précède la fraction $\frac{A}{B}$, on voit que le numérateur de tous ces résidus est le même, & que le dénominateur est le produit de ceux des fractions, dont ces résidus marquent la différence. Donc, à commencer d'une des fractions $\frac{m}{p}$ quelconque, les résidus seront

$$\frac{1}{p \cdot B}, \frac{1}{B [B (2n + 1) w - p]} \text{ \&c.}$$

§. 34. Observons maintenant, que tous ces résidus étant ajoutés à la première fraction, qu'on met pour base, la somme exprimera toujours la tangente de v , de sorte qu'en général il sera

tang

$$\text{tang } v = \frac{m}{p} + \frac{1}{p \cdot B} + \frac{1}{B \cdot [B(2n+1)w - p]} + \&c.$$

& par conséquent

$$\text{tang } v = \frac{1}{w} + \frac{1}{w(3w^2-1)} + \frac{1}{(3w^2-1)(15w^3-6w)} + \&c.$$

$$\text{tang } v = \frac{5w}{3w^2-1} + \frac{1}{(3w^2-1)(15w^3-6w)} + \&c.$$

$$\text{tang } v = \frac{15w^2-1}{15w^3-6w} + \frac{1}{(15w^3-6w)(105w^4-45w^2+1)} + \&c.$$

&c.

On voit donc par ce que nous avons dit (§. 31.) que toutes ces suites sont plus convergentes, que ne l'est aucune progression géométrique décroissante. Soit p. ex. $v = w = 1$, & la tangente de cet arc sera $= 1,55740772 \dots$

$$= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 61} + \frac{1}{61 \cdot 540} + \frac{1}{540 \cdot 5879} +$$

$$\frac{1}{5879 \cdot 75587} + \frac{1}{75587 \cdot 1147426} + \&c.$$

Et pour tout arc $v < 1$, on aura une suite encore plus convergente.

§. 35. Faisons maintenant $w = \omega : \Phi$, $v = \Phi : \omega$, de sorte que Φ, ω soient des nombres entiers quelconques, premiers entre eux. Nous n'aurons qu'à substituer ces valeurs, & il sera

$$\text{tang} \left(\frac{\Phi}{\omega} \right) = \frac{\Phi}{\omega} - \frac{\Phi\Phi}{3\omega - \Phi\Phi} - \frac{\Phi\Phi}{5\omega - \Phi\Phi} - \frac{\Phi\Phi}{7\omega - \Phi\Phi} - \frac{\Phi\Phi}{9\omega - \Phi\Phi} - \&c.$$

§. 36.



§. 36. Ensuite les fractions approchantes de la valeur de tang.
 $\frac{\Phi}{\omega}$ seront

$$\frac{\Phi}{\omega}, \frac{3\omega\Phi}{3\omega^2 - \Phi^2}, \frac{15\omega^2\Phi - \Phi^3}{15\omega^3 - 6\Phi^2\omega}, \frac{105\omega^3\Phi - 10\omega\Phi^3}{105\omega^4 - 45\omega^2\Phi^2 + \Phi^4}, \&c.$$

de sorte que deux de ces fractions quelconques, qui se suivent immédiatement, étant

$$\frac{m}{p},$$

$$\frac{A}{B},$$

celle qui leur succede sera

$$\frac{A(2n+1)\omega - m\Phi^2}{B(2n+1)\omega - p\Phi^2}.$$

§. 37. Enfin les différences de ces fractions seront

$$\frac{\Phi^3}{\omega(3\omega^2 - \Phi^2)}, \frac{\Phi^5}{(3\omega^2 - \Phi^2) \cdot (15\omega^3 - 6\omega\Phi^2)}, \&c.$$

Et la

$$\text{tang} \frac{\Phi}{\omega} = \frac{\Phi}{\omega} + \frac{\Phi^3}{\omega(3\omega^2 - \Phi^2)} + \frac{\Phi^5}{(3\omega^2 - \Phi^2) \cdot (15\omega^3 - 6\omega\Phi^2)} + \&c.$$

Or je dis que cette tangente ne sera jamais commensurable au rayon, quels que soient les nombres entiers ω , Φ .

§. 38. Pour démontrer ce théoreme, posons

$$\text{tang} \frac{\Phi}{\omega} = \frac{M}{P},$$

de sorte que M, P, soient des quantités exprimées d'une façon quelconque, même, si l'on veut par des suites décimales, ce qui pourra toujours se faire, encore que M, P, fussent des nombres entiers, car



on n'auroit qu'à multiplier l'un & l'autre par quelque quantité irrationnelle. On pourra encore, si l'on veut, supposer, $M = \sin \frac{\phi}{\omega}$, $P = \cos \frac{\phi}{\omega}$, comme nous l'avons fait ci-dessus (§. 5.). Et il est clair que, quand même la tang $\frac{\phi}{\omega}$ feroit rationnelle, il n'en feroit pas toujours de même du sin $\frac{\phi}{\omega}$ & du cos $\frac{\phi}{\omega}$.

§. 39. Or la fraction

$$\frac{M}{P}$$

exprimant exactement la tangente de $\frac{\phi}{\omega}$, elle doit donner tous les quotiens ω , 3ω , 5ω &c. qui dans le cas présent sont

$$+ \frac{\omega}{\phi}, - \frac{3\omega}{\phi}, + \frac{5\omega}{\phi}, - \frac{7\omega}{\phi}, + \&c.$$

§. 40. Ensuite, si la tang $\frac{\phi}{\omega}$ est rationnelle il est clair, que M fera à P comme un nombre entier μ à un nombre entier π , de sorte que si μ , π , sont premiers entre eux, il fera

$$M : \mu = P : \pi = D,$$

& D fera le plus grand commun diviseur de M, P. Et comme il est réciproquement

$$M : D = \mu,$$

$$P : D = \pi,$$

on voit que M, P étant supposées être des quantités irrationnelles, leur plus grand commun diviseur fera pareillement une quantité irrationnelle, d'autant plus petite, plus les quotiens μ , π , seront grands.

§. 41.



§. 41. Voilà donc *les deux suppositions dont il faudra faire voir l'incompatibilité.* Divisons d'abord P par M , & le quotient doit être $\equiv \omega : \phi$. Mais comme $\omega : \phi$ est un nombre rompu, divisons ϕP par M , & le quotient ω sera ϕ tuple de $\omega : \phi$. Il est clair qu'on pourra le diviser par ϕ , quand on voudra. Ici nous n'en aurons pas besoin, puisqu'il nous suffit qu'il soit nombre entier. Aiant donc, en divisant ϕP par M , obtenu le quotient ω , soit le résidu $\equiv R'$. Ce résidu sera pareillement ϕ tuple de ce qu'il auroit été, & c'est de quoi nous tiendrons compte. Or, comme il est $P : D \equiv \pi$, nombre entier, il sera encore $\phi P : D \equiv \phi \pi$, nombre entier. Enfin encore $R' : D$ sera un nombre entier. Car, puisque

$$\phi P = \omega M + R',$$

il sera

$$\frac{\phi P}{D} = \frac{\omega M}{D} + \frac{R'}{D}.$$

Mais

$$\phi P : D \equiv \phi \pi,$$

$$\omega M : D \equiv \omega \mu,$$

donc

$$\phi \pi = \omega \mu + \frac{R'}{D},$$

ce qui donne

$$\frac{R'}{D} = \phi \pi - \omega \mu = \text{nombre entier},$$

que nous poserons $\equiv r'$, de sorte que

$$\frac{R'}{D} \equiv r'.$$

Donc le résidu de la première division aura encore le diviseur D , qui est le plus grand commun diviseur de M, P .

§. 42. Passons encore à la seconde division. Le résidu R' étant ϕ tuple de ce qu'il seroit si on avoit divisé P , au lieu de ϕP , par M ,



M, il faudra dans cette seconde division y avoir égard, en divisant ΦM , au lieu de M, par R' , afin d'avoir le second quotient, qui est $\equiv 3\omega : \Phi$. Mais, pour éviter encore ici le quotient rompu, divisons $\Phi^2 M$ par R' , afin d'avoir le quotient 3ω , nombre entier. Soit le résidu $\equiv R''$, & il fera

$$\Phi^2 M \equiv 3\omega R' + R'',$$

donc en divisant par D,

$$\frac{\Phi^2 M}{D} \equiv \frac{3\omega R'}{D} + \frac{R''}{D}.$$

Mais il est

$$\frac{\Phi^2 M}{D} \equiv \Phi^2 m \equiv \text{nombre entier},$$

$$\frac{3\omega R'}{D} \equiv 3\omega r' \equiv \text{nombre entier},$$

donc

$$\Phi^2 m \equiv 3\omega r' + \frac{R''}{D},$$

ce qui donne

$$\frac{R''}{D} \equiv \Phi^2 m - 3\omega r' \equiv \text{nombre entier},$$

que nous poserons $\equiv r''$, de sorte qu'il soit

$$\frac{R''}{D} \equiv r''.$$

Donc le plus grand commun diviseur de M, P, R' , l'est encore du second résidu R'' .

§. 43. Soient les résidus suivans --- R''' , R^{IV} R^n , R^{n+1} , R^{n+2} . . ., qui répondent aux quotiens Φ^{tuples} . . 5ω , 7ω $(2n-1)\omega$, $(2n+1)\omega$, $(2n+3)\omega$. . ., & il s'agit de démontrer



trer généralement, que si deux résidus quelconques R^n , R^{n+1} , qui se suivent immédiatement, ont encore D pour diviseur, le résidu suivant R^{n+2} l'aura également, de sorte que si, en faisant

$$R^n : D = r^n,$$

$$R^{n+1} : D = r^{n+1},$$

r^n , r^{n+1} sont des nombres entiers, on aura encore

$$R^{n+2} : D = r^{n+2},$$

nombre entier. Voici la démonstration.

§. 44. En divisant $\Phi^2 R^n$ par R^{n+1} , le quotient sera $(2n+1)\omega$ = nombre entier, & le résidu étant = R^{n+2} , il sera

$$\Phi^2 R^n = (2n+1)\omega \cdot R^{n+1} + R^{n+2},$$

donc en divisant par D ,

$$\frac{\Phi^2 \cdot R^n}{D} = \frac{(2n+1)\omega \cdot R^{n+1}}{D} + \frac{R^{n+2}}{D}.$$

Mais il est

$$\frac{\Phi^2 R^n}{D} = \Phi^2 r^n = \text{nombre entier},$$

$$\frac{(2n+1)\omega \cdot R^{n+1}}{D} = (2n+1)\omega r^{n+1} = \text{nombre entier},$$

donc

$$\Phi^2 r^n = (2n+1)\omega \cdot r^{n+1} + \frac{R^{n+2}}{D},$$

ce qui donne

$$\frac{R^{n+2}}{D} = \Phi^2 \cdot r^n - (2n+1)\omega \cdot r^{n+1} = \text{nombre entier} = r^{n+2}.$$

Et c'est ce qu'il falloit démontrer.



§. 45. Or nous avons vu que r' , r'' sont des nombres entiers (§. 41. 42.) donc aussi r''' , r^{IV} , ----- r^n ----- &c. à l'infini seront des nombres entiers. Donc indifféremment tous les résidus R' , R'' , R''' ----- R^n ----- &c. à l'infini auront D pour commun diviseur. Trouvons encore la valeur de ces résidus exprimée par M , P .

§. 46. Pour cet effet chaque division nous fournit une équation, en ce qu'il est

$$\begin{aligned} R' &= \phi P - \omega M, \\ R'' &= \phi^2 M - 3\omega \cdot R', \\ R''' &= \phi^2 R' - 5\omega \cdot R'', \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Mais observons que, dans le cas dont il s'agit, les quotiens ω , 3ω , 5ω &c. sont alternativement positifs & négatifs, & que les signes des résidus se succèdent dans l'ordre — — + +. Par là ces équations se changent en

$$\begin{aligned} R' &= \omega M - \phi P, \\ R'' &= 3\omega R' - \phi^2 M, \\ R''' &= 5\omega R'' - \phi^2 R', \\ R^{IV} &= 7\omega R''' - \phi^2 R'', \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Et en général

$$R^{n+2} = (2n+1)\omega \cdot R^{n+1} - \phi^2 R^n.$$

D'où l'on voit que chaque résidu se trouve, moiennant les deux précédens, de la même manière que les numérateurs & les dénominateurs des fractions approchantes de la valeur de tang $\frac{\phi}{\omega}$. (§. 36.)

§. 47. Faisant donc les substitutions que ces équations indiquent, afin d'exprimer tous ces résidus par M , P , nous aurons

R'

$$\begin{aligned} R' &= \omega M - \phi P, \\ R'' &= (3\omega^2 - \phi^2) M - 3\omega\phi \cdot P, \\ R''' &= (15\omega^3 - 6\omega\phi^2) M - (15\omega^2\phi - \phi^3) P, \\ &\&c. \end{aligned}$$

Et ces coefficients de M, P, étant les numérateurs & les dénominateurs des fractions trouvées ci-dessus pour la tang $\frac{\phi}{\omega}$, (§. 36.) on voit encore qu'il sera

$$\begin{aligned} \frac{M}{P} - \frac{\phi}{\omega} &= \frac{R'}{\omega P}, \\ \frac{M}{P} - \frac{3\omega\phi}{3\omega^2 - \phi^2} &= \frac{R''}{(3\omega^2 - \phi^2) \cdot P}, \\ \frac{M}{P} - \frac{15\omega^2\phi - \phi^3}{15\omega^3 - 6\omega\phi^2} &= \frac{R'''}{(15\omega^3 - 6\omega\phi^2) P}, \\ &\&c. \end{aligned}$$

§. 48. Mais il est

$$\frac{M}{P} = \text{tang } \phi.$$

Donc (§. 37. 34.)

$$\begin{aligned} \frac{M}{P} - \frac{\phi}{\omega} &= \frac{\phi^3}{\omega(3\omega^2 - \phi^2)} + \frac{\phi^5}{(3\omega^2 - \phi^2) \cdot (15\omega^3 - 6\omega\phi^2)} + \&c. \\ \frac{M}{P} - \frac{3\omega\phi}{3\omega^2 - \phi^2} &= \frac{\phi^5}{(3\omega^2 - \phi^2) \cdot (15\omega^3 - 6\omega\phi^2)} + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{R'}{\omega P} = \frac{\phi^3}{\omega(3\omega^2 - \phi^2)} + \frac{\phi^5}{(3\omega^2 - \phi^2) \cdot (15\omega^3 - 6\omega\phi^2)} + \&c.$$

R''

$$\frac{R''}{(3\omega^2 - \phi^2)P} = \frac{\phi^5}{(3\omega^2 - \phi^2) \cdot (15\omega^3 - 6\omega\phi^2)} + \&c.$$

$$\frac{R'''}{(15\omega^2 - 6\omega\phi^2)P} = \frac{\phi^7}{(15\omega^3 - 6\omega\phi^2) \cdot (105\omega^4 - 45\omega^2\phi^2 + \phi^4)} + \&c.$$

Ainsi tous les résidus se trouvent moiennant la suite des différences (§. 37.)

$$\begin{aligned} \text{rang } \frac{\phi}{\omega} = & \frac{\phi}{\omega} + \frac{\phi^3}{\omega(3\omega^2 - \phi^2)} + \frac{\phi^5}{(3\omega^2 - \phi^2)(15\omega^3 - 6\omega\phi^2)} \\ & + \frac{\phi^7}{(15\omega^3 - 6\omega\phi^2)(105\omega^4 - 45\omega^2\phi^2 + \phi^4)} \\ & + \&c. \end{aligned}$$

en omettant 1, 2, 3, 4 &c. des premiers termes, & en multipliant la somme des suivans par le premier facteur du dénominateur du premier terme qu'on retient, & par P.

§. 49. Or cette suite des différences est plus convergente que ne l'est aucune progression géométrique décroissante (§. 34. 35.). Donc les résidus R' , R'' , R''' &c. décroissent en sorte qu'enfin ils deviennent plus petits qu'aucune quantité assignable. Et comme chacun de ces résidus, aiant D pour commun diviseur, est un multiple de D, il s'ensuit que ce diviseur commun D est plus petit qu'aucune quantité assignable, ce qui fait $D = 0$, & emporte la conséquence, que $(M:P)$ est une quantité incommensurable à l'unité, ou irrationnelle.

§. 50. Donc toutes les fois qu'un arc de cercle $= \frac{\phi}{\omega}$ sera commensurable ou rayon $= 1$, ou rationnelle, la tangente de cet arc sera une quantité incommensurable au rayon, ou irrationnelle. Et réciproquement aucune tangente rationnelle n'est celle d'un arc rationnel.

§. 51. Or la tangente de 45° étant rationnelle, en ce qu'elle est égale au rayon, il s'ensuit que l'arc de 45° degrés, & partant aussi



aussi l'arc de 90, 180, 360 degrés, est incommensurable au rayon. Donc la circonférence du cercle n'est point au diamètre comme un nombre entier à un nombre entier. Voilà donc ce théorème en forme de corollaire d'un autre théorème infiniment plus universel.

§. 52. En effet, c'est précisément cette absolue universalité, dont on peut avoir lieu d'être surpris. Outre qu'elle nous fait connoître combien les quantités circulaires sont transcendentes, elle nous fait encore voir, que les tangentes rationnelles & les arcs rationnels ne sont pas distribués par toute la circonférence du cercle, de façon comme s'ils étoient jettés au hazard, mais qu'il faut qu'il s'y trouve un certain ordre, & que cet ordre les empêche de se rencontrer jamais. Cet ordre mérite, sans contredit, d'être connu plus en détail. Voions donc jusqu'où il sera possible d'en déterminer les loix. C'est à quoi aboutiront les théoremes suivans.

§ 3. D'abord on fait que, deux tangentes étant rationnelles, la tangente de la somme & celle de la différence de leurs arcs sont également rationnelles. Car il est

$$\text{tang } (\omega + \phi) = \frac{t\omega + t\phi}{1 - t\omega \cdot t\phi},$$

$$\text{tang } (\omega - \phi) = \frac{t\omega - t\phi}{1 + t\omega \cdot t\phi}.$$

§. 54. De là il suit, qu'une tangente étant rationnelle, la tangente d'un multiple quelconque de son arc sera également rationnelle.

§. 55. Mais au contraire, une tangente étant rationnelle, aucune partie aliquote de son arc n'aura une tangente rationnelle. Car l'arc proposé étant multiple de chacune de ses parties aliquotes, il est clair que sa tangente seroit rationnelle, si celle d'une de ses parties aliquotes étoit rationnelle (§. 54.).

§. 56. Si la tangente de chacun de deux arcs commensurables entre eux est rationnelle, la tangente de la plus grande commune mesure de



ces deux arcs sera également rationelle. Soient ω, ϕ , les deux arcs proposés. Or, étant commensurables, il sera ω à ϕ comme un nombre entier m à un nombre entier n . Soient ces nombres m, n , premiers entre eux, & l'unité sera leur plus grande commune mesure. Faisant donc

$$\omega = m\psi,$$

$$\phi = n\psi,$$

& l'arc ψ sera la plus grande commune mesure des arcs ω, ϕ . Or je dis que la tang ψ sera rationelle. Soit $m > n$, & en soustrayant n de m autant de fois qu'il se pourra, soit le dernier reste $= r$, toutes les tang $(m - n)\psi = t(\omega - \phi)$, tang $(m - 2n)\psi = t(\omega - 2\phi)$, &c. tang $r\psi$, seront rationelles (§. 53.). Soustraiez r de n autant de fois qu'il se pourra, soit le dernier résidu $= r'$. Soustraiez encore r' de r autant de fois qu'il se pourra, soit le dernier résidu r'' &c. Et en continuant de la sorte, vous parviendrés à un résidu $= 1$, les nombres m, n étant premiers entre eux. (*Euclid. Pr. I. Livr. VII.*) Mais par le §. 53. toutes les tangentes

$$t(m - n)\psi, t(m - 2n)\psi \quad - \quad - \quad - \quad - \quad tr\psi,$$

$$t(n - r)\psi, t(n - 2r)\psi \quad - \quad - \quad - \quad - \quad tr'\psi,$$

$$t(r - r')\psi, t(n - 2r')\psi \quad - \quad - \quad - \quad - \quad tr''\psi,$$

&c.

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad t\psi,$$

seront rationelles. Donc &c.

§. 57. Toutes ces tangentes pouvant être trouvées par les tang ω , tang ϕ , sans qu'on en connoisse les arcs (§. 53.) il est clair que de cette manière deux tangentes rationelles quelconques étant données, on trouvera si leurs arcs sont commensurables entre eux? Mais si les arcs ne le sont point, le travail seroit sans fin.

§. 58. Deux parties aliquotes d'un arc quelconque aiant des tangentes rationelles, je dis que la tangente de la plus grande commune mesure de ces deux parties aliquotes sera pareillement rationelle. Ce théo-
reme



ces deux arcs sera également rationelle. Soient ω, ϕ , les deux arcs proposés. Or, étant commensurables, il sera ω à ϕ comme un nombre entier m à un nombre entier n . Soient ces nombres m, n , premiers entre eux, & l'unité sera leur plus grande commune mesure. Faisant donc

$$\omega = m\psi,$$

$$\phi = n\psi,$$

& l'arc ψ sera la plus grande commune mesure des arcs ω, ϕ . Or je dis que la tang ψ sera rationelle. Soit $m > n$, & en soustrayant n de m autant de fois qu'il se pourra, soit le dernier reste $= r$, toutes les tang $(m - n)\psi = t(\omega - \phi)$, tang $(m - 2n)\psi = t(\omega - 2\phi)$, &c. tang $r\psi$, seront rationelles (§. 53.). Soustraiez r de n autant de fois qu'il se pourra, soit le dernier résidu $= r'$. Soustraiez encore r' de r autant de fois qu'il se pourra, soit le dernier résidu r'' &c. Et en continuant de la sorte, vous parviendrés à un résidu $= 1$, les nombres m, n étant premiers entre eux. (*Euclid. Pr. I. Livr. VII.*) Mais par le §. 53. toutes les tangentes

$$t(m - n)\psi, t(m - 2n)\psi \quad - \quad - \quad - \quad - \quad tr\psi,$$

$$t(n - r)\psi, t(n - 2r)\psi \quad - \quad - \quad - \quad - \quad tr'\psi,$$

$$t(r - r')\psi, t(n - 2r')\psi \quad - \quad - \quad - \quad - \quad tr''\psi,$$

&c.

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad t\psi,$$

seront rationelles. Donc &c.

§. 57. Toutes ces tangentes pouvant être trouvées par les tang ω , tang ϕ , sans qu'on en connoisse les arcs (§. 53.) il est clair que de cette manière deux tangentes rationelles quelconques étant données, on trouvera si leurs arcs sont commensurables entre eux? Mais si les arcs ne le sont point, le travail seroit sans fin.

§. 58. Deux parties aliquotes d'un arc quelconque aiant des tangentes rationelles, je dis que la tangente de la plus grande commune mesure de ces deux parties aliquotes sera pareillement rationelle. Ce théo-
reme



reme suit immédiatement du précédent (§. 56.). On n'a qu'à se souvenir, que deux arcs ω , ϕ , qui sont des parties aliquotes d'un arc A , sont commensurables entre eux.

§. 59. De la même manière, si autant de parties aliquotes d'un arc A , que l'on voudra, ont des tangentes rationnelles, la tangente de l'arc, qui est la plus grande commune mesure de ces parties aliquotes, sera également rationnelle. Qu'on prenne deux de ces parties aliquotes ω , ϕ , & soit leur plus grande commune mesure ψ , & la tang ψ sera rationnelle (§. 56. 58.). Mais ψ étant partie aliquote des arcs ω , ϕ , qui sont parties aliquotes de l'arc A , il est clair que ψ sera partie aliquote de l'arc A , & qu'au lieu des arcs ω , ϕ , on peut substituer ψ , en comparant ψ avec une des autres parties aliquotes de l'arc A proposées. On continuera de trouver leur plus grande commune mesure, dont la tangente sera également rationnelle. &c.

§. 60. Nommons *tangente première* toute tangente rationnelle, qui soit celle d'un arc, dont aucune partie aliquote n'ait une tangente rationnelle.

§. 61. Telle est p. ex. la tangente de 45° . Car, soit n un nombre entier quelconque, toute tang $(45 : n)^\circ$ sera une des racines de l'équation

$$0 = 1 - nx - n \cdot \frac{n-1}{2} x^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^3 - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} x^4 \\ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n-4}{5} x^5 - \&c.$$

dont les coefficients sont les mêmes que ceux de la formule binomiale de *Newton*, & dont les signes changent suivant l'ordre $- + + -$. Mais, pour tout n nombre entier, tous ces coefficients sont des nombres entiers, & toute

$$\text{tang} \left(\frac{45^\circ}{n} \right) < 1.$$



Donc, si une ou plus d'une des tang $(45^\circ : n)$ étoit rationnelle, elle seroit une *fraction* rationnelle < 1 , & si cela étoit, tous les coefficients ne sauroient être des nombres entiers. Mais ils le sont. Donc &c.

§. 62. *Une tangente premiere quelconque étant proposée, il n'y a que les multiples de son arc qui ayent des tangentes rationnelles, à l'exclusion de tous les autres arcs qui lui sont commensurables.* Soit tang ω premiere, & m, n , étant des nombres entiers premiers entre eux, supposons que la tang $\left(\frac{m}{n}\omega\right)$ puisse être rationnelle. Or l'arc $\left(\frac{\omega}{n}\right)$ étant la plus grande commune mesure des arcs ω , & $\left(\frac{m\omega}{n}\right)$, la tangente de $\frac{\omega}{n}$ sera rationnelle (§. 56.). Mais $\frac{\omega}{n}$ étant une partie aliquote de ω , la tang ω ne seroit point premiere. Ce qui étant contre l'hypothese, on voit qu'aucune tang $\left(\frac{m}{n}\omega\right)$ ne sauroit être rationnelle. Donc il ne reste que les multiples de ω , dont les tangentes seront rationnelles (§. 54.). Voilà donc la raison, pourquoi ces sortes de tangentes méritent le nom de premieres. Elles ressemblent en quelque façon aux nombres premiers, en ce qu'il n'y a que leurs multiples qui soient des nombres entiers, &c.

§. 63. *Deux tangentes premieres étant proposées, je dis que leurs arcs sont incommensurables entre eux.* Car soient tang ω , tang ϕ premieres, & supposons que les arcs ω, ϕ puissent être commensurables entre eux. Ils seront donc comme un nombre entier m à un nombre entier n . Donc

$$\phi = \frac{m\omega}{n}.$$

Donc (§. 62.) $\frac{\omega}{n}$, partie aliquote de ω , aura une tangente rationnelle
de



de même que $\frac{\Phi}{m}$ partie aliquote de Φ . Donc $t\Phi$, $t\omega$, ne seront point premières. Ce qui étant contre l'hypothèse, il est clair que les arcs ω , Φ , ne sauroient être commensurables entre eux.

§. 64. *Ainsi tous les arcs des tangentes premières sont incommensurables entre eux.* Car, par le théorème précédent, ils le sont deux à deux, combinés d'une façon quelconque.

§. 65. *Une tangente rationnelle quelconque, qui ne soit pas première, étant proposée, je dis que son arc sera un multiple de celui d'une tangente première.* Car cette tangente, toute rationnelle qu'elle est, n'étant point première, ce ne peut être que parce qu'il y a des parties aliquotes de son arc, dont les tangentes soient rationnelles. Soient ces parties aliquotes $\frac{\omega}{m}$, $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega}{p}$, $\frac{\omega}{q}$ &c. dont le nombre est posé comme étant fini. Or, comme nous les prenons toutes, il faut que celle qui est la commune mesure de toutes les autres s'y trouve aussi, tandis que par le §. 59. la tangente est pareillement rationnelle. Qu'elle soit $\frac{\omega}{r}$, je dis que tang $\frac{\omega}{r}$ est première. Car, si elle n'étoit pas première, les tangentes de quelques unes des parties aliquotes de $\left(\frac{\omega}{r}\right)$ seroient rationnelles. Or ces parties aliquotes de $\left(\frac{\omega}{r}\right)$ étant également parties aliquotes de l'arc proposé ω , il est clair qu'elles seroient déjà comprises dans les parties aliquotes $\frac{\omega}{m}$, $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega}{p}$ $\frac{\omega}{r}$, & que par conséquent $\frac{\omega}{r}$ feroit pareillement leur plus grande commune mesure. Ainsi $\frac{\omega}{r}$ feroit mesure de ses parties aliquotes. Ce



qui étant absurde, on voit que $\text{tang } \frac{\omega}{r}$ est premiere. Or ω est un multiple de $\frac{\omega}{r}$. Donc &c.

§. 67. Voilà donc toutes les tangentes rationnelles rangées en certaines classes. Elles sont ou premieres elles-mêmes, ou elles descendent, pour ainsi dire, en droite ligne d'une tangente premiere, parce qu'il n'y a que les multiples des arcs des tangentes premieres qui aient des tangentes rationnelles (§. 62.). Or, s'il n'y avoit qu'une seule tangente premiere, toutes les tangentes rationnelles en dériveroient, & tous leurs arcs seroient commensurables entre eux. Mais il s'en faut de beaucoup, qu'il n'y ait qu'une seule tangente premiere. Car elle devroit être plus petite qu'aucune quantité assignable. Donnons lui, pour démontrer cela, une grandeur finie $\equiv \text{tang } \phi$. Et il est clair qu'il y aura des tangentes rationnelles plus petites que $\text{tang } \phi$. Si ces tangentes sont premieres, $\text{tang } \phi$ ne sera pas la seule qui soit premiere. Si elles ne sont point premieres, elles dérivent d'une ou de plusieurs tangentes premieres, en ce que leurs arcs seront des multiples de ceux de ces tangentes premieres (§. 65.). Ainsi il y a plus d'une, plus de 2, 3, 4 &c. tangentes premieres. Et aussi longtems qu'on en suppose le nombre fini, on trouvera de la même maniere qu'il y en a d'avantage. Voici encore une autre maniere d'en trouver un nombre infini.

§. 67. Soient deux tangentes premieres $t\omega$, $t\phi$. D'abord elles seront rationnelles, & leurs arcs seront incommensurables entre eux (§. 64.). Soient m , n , des nombres quelconques premiers entre eux, & $(m\omega + n\phi)$ sera un arc incommensurable tant à ω qu'à ϕ . Mais sa tangente sera rationnelle (§. 62. 53.). Or l'arc $(m\omega + n\phi)$ n'étant point multiple, ni de ω ni de ϕ , la tang $(m\omega + n\phi)$ sera ou premiere elle-même, ou elle dérivera d'une tangente premiere, nécessairement différente de $t\omega$, $t\phi$. Or, en variant les nombres m , n , de toutes les façons possibles, de sorte qu'ils soient toujours premiers entre eux, on trouvera autant d'arcs $(m\omega + n\phi)$ incommensurables
tant



tant entre eux qu'aux arcs ω , ϕ , & qui par conséquent ne sont ni multiples les uns des autres, ni de ω , ϕ . Donc leurs tangentes, qui toutes sont rationnelles, dériveront d'autant de tangentes premières, différentes les unes des autres.

§. 68. Voilà donc ce qui restreint infiniment la possibilité de trouver un arc rationel, dont la tangente soit également rationnelle. Car les arcs de toutes les tangentes premières étant incommensurables entre eux, il s'ensuit que, quand il seroit possible de trouver une tangente première, dont l'arc fut commensurable au rayon, ce seroit la seule, puisque les arcs de toutes les autres tangentes premières seroient nécessairement incommensurables au rayon. Mais, par ce que nous avons vu ci-dessus, encore cette seule est exclue de la possibilité d'avoir son arc rationel.

§. 69. La tangente de l'angle de 45° étant première (§. 61.) & se trouvant dans les tables trigonométriques, je remarquerai encore en forme de corollaire, que c'est la seule tangente première, & en même tems la seule tangente rationnelle qui s'y trouve. La raison en est, que tous les arcs dont les tangentes sont marquées dans ces tables, sont commensurables entre eux, sans qu'il s'y trouve d'autre multiple de 45° , que l'angle de 90° , dont la tangente est infinie.

§. 70. J'observerai encore, que le cosinus d'un angle ω quelconque étant rationel, le cosinus d'un multiple quelconque est pareillement rationel. Cette circonstance fait, que le même raisonnement que nous avons exposé à l'égard des tangentes, pourra, à quelque changement près, être appliqué aux cosinus. On trouvera des *cosinus premiers* comme nous avons trouvé des *tangentes premières*, & les arcs des cosinus premiers seront pareillement incommensurables entre eux; de sorte que, quand il seroit possible de trouver un cosinus premier dont l'arc fut rationel, ce ne seroit encore que le seul qu'on pût trouver, vu que par là même les arcs de tous les autres cosinus premiers seroient irrationels.



§. 71. Il n'en est pas de même des sinus, parce qu'un sin ω quelconque étant rationel, il n'y a en général que les $\sqrt{3} \omega$, $\sqrt{5} \omega$, $\sqrt{7} \omega$ &c. qui soient rationels; mais les sin 2ω , $\sqrt{4} \omega$, $\sqrt{6} \omega$ &c. ne le sont pas toujours, à moins que cos ω ne soit aussi rationel, de sorte que si on veut encore ici trouver des *sinus premiers*, il faudra s'y prendre d'une autre façon, que nous ne l'avons fait à l'égard des tangentes.

§. 72. Mais, sans m'y arrêter, je retournerai à la fraction continue, trouvée ci-dessus

$$\text{tang } v = \frac{1}{w - \frac{1}{3w - \frac{1}{5w - \frac{1}{7w - \frac{1}{9w - 1 \text{ \&c.}}}}}}$$

Nous avons vu que toutes les fractions

$$\frac{1}{w}, \frac{3w}{3w^2 - 1}, \frac{15w^2 - 1}{15w^3 - 6w}, \text{ \&c.}$$

qu'elle donne, n'approchent de la valeur de la tangente de v , que par défaut en ce qu'elles sont toutes plus petites que cette tangente. Mais, comme il doit être possible de trouver des fractions semblables, qui, quoique approchantes de la valeur de tang v , manquent par excès, je me suis mis à en faire la recherche. Je me bornerai ici à donner encore la fraction continue, qui renferme alternativement & les unes & les autres. La voici



$$\text{tang } v = \frac{1}{0 + \frac{1}{(w-1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{(3w-2) + \frac{1}{1 + \frac{1}{(5w-2) + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

Cette fraction continue à l'infini, en sorte que les quotiens sont

$$\begin{aligned} & 0, (w-1), 1, (3w-2), 1, (5w-2), 1, (7w-2), 1, (9w-2) \\ & \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 1, ((2n+1)w-2), 1 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Et les fractions approchantes de la valeur de tang v , sont

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w-1}, \frac{1}{w}, \frac{3w-1}{3w^2-w-1}, \frac{3w}{3w^2-1}, \frac{15w^2-3w-1}{15w^3-3w^2-6w+1}, \\ & \quad \frac{15w^2-1}{15w^3-6w}, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

La première, 3^{me}, 5^{me}, 7^{me} &c. sont plus grandes que tang v , & la 2^{de}, 4^{me}, 6^{me} &c, sont plus petites, & les mêmes que celles que nous avons trouvées ci-dessus (§. 22.). Je ne m'arrêterai pas à en donner la démonstration, vu que cette fraction continue peut être trouvée de la même manière, que nous avons trouvé celle dont nous nous sommes servi jusqu'à présent, & qui est beaucoup plus simple. Je remarquerai donc seulement, que le premier quotient étant ici $= 0$, on n'aura, pour l'abolir, qu'à tourner la fraction en sorte qu'elle exprime la cotangente de v , puisqu'il est

$$\cot v = \frac{1}{\text{tang } v}.$$

Ainsi nous aurons

$$\cot v = \frac{1}{(w-1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{(3w-2) + \frac{1}{1 + \frac{1}{(5w-2) + \frac{1}{1 + \frac{1}{(7w-2) + \frac{1}{1 + \&c.}}}}}}}$$

§. 73. Comparons maintenant les quantités transcendentes circulaires aux quantités logarithmiques qui leur sont analogues. Soit e le nombre, dont le logarithme hyperbolique est $= 1$. Et on fait, que si dans les deux suites dont nous nous sommes servi ci dessus (§. 4.)

$$\sin v = v - \frac{1}{2 \cdot 3} v^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} v^7 + \&c.$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} v^6 + \&c.$$

tous les signes sont pris positifs, elles se changent en :

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = v + \frac{1}{2 \cdot 3} v^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} v^7 + \&c.$$

$$\frac{e^v - e^{-v}}{2} = 1 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} v^6 + \&c.$$

Or, en traitant ces deux dernières suites de la même manière que nous avons traité les deux premières (§. 4. & suiv.) l'opération ne différera que dans les signes, qui pour le cas présent seront tous positifs. Comme on peut s'en convaincre sans peine, je n'en rapporterai point le détail. Il sera donc



$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \frac{1}{1:v + 1} - \frac{1}{3:v + 1} + \frac{1}{5:v + 1} - \frac{1}{7:v + 1} + \frac{1}{9:v + 1} - \frac{1}{11:v + 1} + \frac{1}{13:v + 1} - \&c.$$

§. 74. Et comme il est

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \frac{e^{2v} - 1}{e^{2v} + 1},$$

on voit qu'en faisant $2v = x$, on aura

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{2:x + 1} - \frac{1}{6:x + 1} + \frac{1}{10:x + 1} - \frac{1}{14:x + 1} + \frac{1}{18:x + 1} - \&c.$$

d'où l'on tire

$$\frac{e^x + 1}{2} = \frac{1}{1 - 1} + \frac{1}{2:x + 1} - \frac{1}{6:x + 1} + \frac{1}{10:x + 1} - \frac{1}{14:x + 1} + \&c.$$

ou bien

$$\frac{e^x - 1}{2} = \frac{1}{(2:x) \frac{1}{1 + \frac{1}{6:x - 1 + \frac{1}{10:x - 1 + \frac{1}{14:x - 1 + \frac{1}{18:x - \&c.}}}}}$$

On voit bien que ces expressions offrent des conséquences semblables à celles que nous avons déduites ci-dessus de la formule

$$\text{tang } v = \frac{1}{w - \frac{1}{3w - \frac{1}{5w - \&c.}}}$$

On trouvera encore ici que v & e^v , de même que x & e^x ne seront jamais des quantités rationnelles en même tems. Ainsi je ne m'arrêterai pas à en faire une déduction reiterée. Il s'agit plutôt d'interpréter les formules que nous venons d'exposer. J'observe donc, qu'elles doivent avoir, à l'égard de l'hyperbole équilaterale, une signification tout à fait analogue à celle qu'avoit la fraction

$$\text{tang } v = \frac{1}{w - \frac{1}{3w - \&c.}}$$

par rapport au cercle. Car, outre qu'on sait que les expressions

$$e^u + e^{-u},$$

$$e^u - e^{-u},$$

en faisant $u = v\sqrt{-1}$, donnent les quantités circulaires

$$e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2 \cos v,$$

$$e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} = 2 \sin v \cdot \sqrt{-1}.$$



Mr. de Foucenex a encore fait voir d'une maniere très simple & très directe, comment cette affinité se trouve en comparant ensemble le cercle & l'hyperbole équilaterale qui ont un même centre & un même diamètre. Voiez *Miscell. Societ. Taurin.* Tom. I. p. 128. suiv.

§. 75. Mais ici il s'agit de voir jusqu'où cette affinité peut être poussée indépendamment des quantités imaginaires. Soit donc C le centre, CH l'axe, CA le demi-diametre de l'hyperbole équilaterale AMG & du cercle AND, CF l'asymptote, AB perpendiculaire à l'axe, & en même tems la tangente commune au cercle & à l'hyperbole. Soient tirées du centre C les deux droites CM, Cm, infiniment proches l'une de l'autre, & des points d'intersection M, m, N, n, soient abaissées sur l'axe les ordonnées MP, mp, NQ, nq. Enfin soit le rayon AC = 1. Faisons l'angle MCA = ϕ , & soit

Planche X.

pour l'hyperbole	pour le cercle
l'abscisse CP = ξ	CQ = x
l'ordonnée PM = η	QN = y,
le segment AMCA = $u : 2$	ANCA = $v : 2$
& il sera	
$\text{tang } \phi = \frac{\eta}{\xi}$	$\text{tang } \phi = \frac{y}{x}$,
$1 + \eta\eta = \xi\xi = \eta\eta \cdot \cot \phi^2$	$1 - yy = xx = yy \cdot \cot \phi^2$,
$\xi\xi - 1 = \eta\eta = \xi\xi \cdot \text{tang } \phi^2$	$1 - xx = yy = xx \cdot \text{tang } \phi^2$,
$\text{CM}^2 = \xi^2 + \eta^2 = \xi^2 (1 + \text{tang } \phi^2)$	$\text{CN}^2 = x^2 + y^2 = x^2 (1 + \text{tang } \phi^2)$,
$= \frac{1 + \text{tang } \phi^2}{1 - \text{tang } \phi^2}$	$= \frac{1 + \text{tang } \phi^2}{1 + \text{tang } \phi^2} = 1.$

Donc

$$\begin{aligned}
 + du &= d\phi \cdot \left(\frac{1 + \text{tang } \phi^2}{1 - \text{tang } \phi^2} \right) = \frac{d \text{tang } \phi}{1 - \text{tang } \phi^2} & + dv &= d\phi = \frac{d \text{tang } \phi}{1 + \text{tang } \phi^2}, \\
 + d\xi &= \frac{\text{tang } \phi \cdot d \text{tang } \phi}{(1 - \text{tang } \phi^2)^{3/2}} & - dx &= \frac{\text{tang } \phi \cdot d \text{tang } \phi}{(1 + \text{tang } \phi^2)^{3/2}}, \\
 + d\eta &= \frac{d \text{tang } \phi}{(1 - \text{tang } \phi^2)^{3/2}} & + dy &= \frac{d \text{tang } \phi}{(1 + \text{tang } \phi^2)^{3/2}},
 \end{aligned}$$

Q 3

$\xi =$



$$\begin{array}{l|l} \xi = \frac{1}{V(1-t\phi^2)} & x = \frac{1}{V(1+t\phi^2)}, \\ \eta = \frac{t\phi}{V(1-t\phi^2)} & y = \frac{t\phi}{V(1+t\phi^2)}, \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{l|l} + d\xi : du = \eta & - dx : dv = y, \\ + d\eta : du = \xi & + dy : dv = x, \\ + d\xi = d\eta \cdot \text{tang } \phi & - dx : dy = \text{tang } \phi. \end{array}$$

§. 76. Comme l'angle ϕ est le même pour l'hyperbole & pour le cercle, il suit des deux dernières équations qu'il est

$$\text{tang } \phi = d\xi : d\eta = -dx : dy = \eta : \xi = y : x.$$

Ainsi les angles Mmp , Nnq , sont égaux. Ce qui donne

$$Mm : Nn = d\xi : -dx = d\eta : dy.$$

Et les triangles caractéristiques $Mm\mu$, Nnv , sont semblables. Enfin, comme il est $Cnq = Cmp$, & $Nnq = Mmp$, il sera $Cnq + Nnq = Cmp + Mmp = 90^\circ$. Tirant donc la normale mV , il sera $Vmq + Mmq = 90^\circ$, donc $Vmq = Cmq$. Ainsi la normale mV prolongée jusqu'à l'axe AC , est égale à Cm , tout comme dans le cercle la normale Cn est égale à Cn . Voilà donc surquoi se fonde tout ce qu'il y a de réel dans les comparaisons qu'on a faites entre le cercle & l'hyperbole.

§. 77. Ensuite, si pour l'hyperbole on veut exprimer ξ , η , par u , on trouvera aisément, qu'en employant des suites infinies leur forme doit être

$$\begin{array}{l} \xi = 1 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + \&c. \\ \eta = au + bu^3 + cu^5 + du^7 + \&c. \end{array}$$

Car, en faisant $u = 0$, on a $\xi = 1$, $\eta = 0$. De plus, en prenant u infiniment petite, ξ croîtra comme u^2 , & η croîtra comme u , parce que l'angle en A est droit, & le rayon osculateur de l'hyperbole en



A est $\equiv AC$. Enfin, en prenant u négative, toutes les valeurs de ξ seront les mêmes que pour les u positives, d'où il suit, que l'abscisse ξ doit être exprimée par des dimensions paires de u . Et en prenant u négative, les valeurs de η seront les mêmes, mais négatives. Donc η doit être exprimée par des dimensions impaires de u . Il ne reste donc plus que de déterminer les coefficients. C'est à quoi nous serviront les deux formules trouvées ci-dessus

$$d\xi : du \equiv \eta,$$

$$d\eta : du \equiv \xi.$$

On aura donc, en différentiant la première suite

$$d\xi : du \equiv 2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5 + \dots + \mu \cdot Mu^{\mu-1}$$

qui doit être $\equiv \eta$, donc

$$d\xi : du \equiv au + bu^3 + cu^5 + \dots + m \cdot u^{\mu-1}$$

Donc, en comparant les termes

$$2A \equiv a,$$

$$4B \equiv b,$$

$$6C \equiv c,$$

&c.

$$\mu M \equiv m.$$

Mais, en différentiant η , il doit encore être $d\eta : du \equiv \xi$, donc

$$d\eta : du \equiv a + 3bu^2 + 5cu^4 + \dots + (\mu-1) \cdot mu^{\mu-2}$$

$$\equiv 1 + Au^2 + Bu^4 + \dots + L \cdot u^{\mu-2}$$

Donc, en comparant les termes

$$a \equiv 1,$$

$$3b \equiv A,$$

$$5c \equiv B,$$

&c.

$$(\mu-1)m \equiv L.$$



Moyennant ces équations on aura

$$a = 1,$$

$$A = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2},$$

$$b = \frac{1}{3} A = \frac{1}{2 \cdot 3},$$

$$B = \frac{1}{4} b = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$c = \frac{1}{5} B = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$C = \frac{1}{6} c = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

&c.

$$m = \frac{1}{(\mu - 1)} \quad L = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (\mu - 1)},$$

$$M = \frac{1}{\mu} \cdot m = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \mu}.$$

Ainsi il fera

$$\xi = 1 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} u^4 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} u^6 + \&c.$$

$$\eta = u + \frac{1}{2 \cdot 3} u^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} u^5 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} u^7 + \&c.$$

Voilà donc l'abscisse ξ , & l'ordonnée η , exprimées par la lettre u , qui est le double de l'aire du segment hyperbolique AMCA. Or on sçait que si au lieu de u , on prend v , qui est le double du segment circulaire ANCA, l'abscisse x , & l'ordonnée y , circulaires l'une & l'autre, sont

$$x = 1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} v^6 + \&c.$$

$$y = v - \frac{1}{2 \cdot 3} v^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} v^7 + \&c.$$

deux



deux suites, qui pour la forme ne different des deux précédentes que par le changement alternatif des signes.

§. 78. Et comme il est (§. 73.)

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = 1 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} u^4 + \&c.$$

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = u + \frac{1}{2 \cdot 3} u^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} u^5 + \&c.$$

on voit qu'il fera

$$\xi = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$\eta = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

& que par conséquent ces quantités expriment l'abscisse $\xi = CP$, & l'ordonnée $\eta = PM$ de l'hyperbole.

§. 79. Et comme il est $\eta : \xi = \text{tang } \phi$, on voit encore qu'il fera

$$\text{tang } \phi = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

donc par le §. 81.

$$\text{tang } \phi = \frac{1}{1 : u + 1} \frac{1}{3 : u + 1} \frac{1}{5 : u + 1} \frac{1}{7 : u + 1} \frac{1}{9 : u + 1} \&c.$$

Et comme la même tangente est aussi



$$\text{rang } v = \text{rang } \phi = \frac{1}{1 : v - \frac{1}{3 : v - \frac{1}{5 : v - \frac{1}{7 : v - \frac{1}{9 : v - \dots}}}}}$$

on voit qu'on trouve cette tangente par ces deux fractions continues, qui pour la forme ne diffèrent que dans les signes : il ne s'agit que d'employer $u = 2 \text{ AMCA}$, quand on se sert de la première, au lieu qu'il faut employer $v = 2 \text{ ANCA}$, pour avoir la même tangente moyennant la seconde. Voilà donc l'analogie qu'il falloit trouver indépendamment des quantités imaginaires, & sans les y mêler.

§. 80. Maintenant nous pourrons tirer en termes très clairs la conséquence, que *l'aire du secteur hyperbolique AMCA, tout de même que celle du secteur circulaire ANCA répondant, sera une quantité irrationnelle ou incommensurable au carré du rayon AC, toutes les fois que l'angle ϕ , qui est celui que l'un & l'autre de ces deux secteurs forme au centre C, aura une tangente rationnelle, & que réciproquement cette tangente sera irrationnelle toutes les fois que l'un de ces deux secteurs sera une quantité rationnelle.*

§. 81. Il y a une conséquence tout à fait semblable à faire à l'égard de la fraction continue (§. 74.)

$$\frac{e^u + 1}{2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2 : u + \frac{1}{6 : u + \frac{1}{10 : u + \frac{1}{14 : u + \frac{1}{18 : u + \dots}}}}}$$

qui se transforme en

$$e^u +$$

$$\frac{e^u + 1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{-2:u + 1} + \frac{1}{-6:u + 1} + \frac{1}{-10:u + 1} + \&c.}$$

& d'où l'on tire pour u négatif

$$\frac{e^{-u} + 1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2:u + 1} + \frac{1}{6:u + 1} + \frac{1}{10:u + 1} + \frac{1}{14:u + 1} + \&c.}$$

Ces fractions nous font connoître à quel point l'irrationalité du nombre $e = 2,71828182845904523536028 - - -$ est transcendente, en ce qu'aucune de ses dignités ni aucune de ses racines n'est rationnelle. Car u & e^u ne sauroit être en même tems une quantité rationnelle. Or u étant le logarithme hyperbolique de e^u , il s'ensuit, que tout logarithme hyperbolique rationnel est celui d'un nombre irrationnel, & que réciproquement tout nombre rationnel a un logarithme hyperbolique irrationnel.

§. 82. Mais voyons encore ce que e^u & e^{-u} , signifient dans la figure. Retournons pour cet effet au §. 78. où nous trouverons les deux formules

$$\xi = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$\eta = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

donc en prenant la somme & la différence, il sera

$$e^u = \xi + \eta,$$

$$e^{-u} = \xi - \eta.$$



Mais les asymptotes CF, CS, formant entre elles un angle droit, que l'axe CH coupe en deux parties égales, il sera

$$\xi = CP = PS = PR,$$

$$\eta = PM,$$

donc

$$\xi + \eta = SM,$$

$$\xi - \eta = MR,$$

& partant

$$e^u = SM,$$

$$e^{-u} = MR,$$

d'où l'on voit en même tems qu'il est

$$e^u \cdot e^{-u} = SM \cdot MR = 1.$$

On voit de plus, que tandis qu'il est

$$e^u = SM,$$

$$e^{-u} = MR,$$

$$AB = 1,$$

il sera, en prenant les logarithmes,

$$u = \log \frac{SM}{AB} = \log \frac{AB}{MR}.$$

Et comme u , e^u , ne sauroient être rationnelles en même tems, on voit qu'il en est de même à l'égard de l'aire du secteur $AMCA = \frac{1}{2}u$, & des ordonnées SM, MR.

§. 83. Nous avons encore (§. 75.) la différentielle

$$du = \frac{d \operatorname{rang} \phi}{1 - t \phi^2},$$

dont l'intégrale se trouve être

$2u = \log \frac{1 + t\phi}{1 - t\phi} = \log. \text{tang. } (45^\circ + \phi) = \text{l. tang SCM},$
ou bien

$$2u = -\log \frac{1 - t\phi}{1 + t\phi} = -\text{l. tang } (45^\circ - \phi) = -\text{l. tang RCM}.$$

Retenons la première de ces formules

$$2u = \log \left(\frac{1 + t\phi}{1 - t\phi} \right),$$

& elle nous mettra en état de retrouver encore à l'égard des secteurs hyperboliques ce que nous avons vu être *tangente première* à l'égard des secteurs circulaires. Voici comment.

§. 84. Considérons d'abord que le secteur hyperbolique AMCA croît avec l'angle $\phi = MCA$, de sorte qu'il devient infini, lorsque $\phi = 45^\circ$. Il est donc clair qu'un de ces secteurs étant donné, on peut trouver d'autres, qui en soient des multiples quelconques, & des parties quelconques, ou qui le surpassent d'une quantité quelconque. Or à chacun de ces secteurs il répond un angle MCP, par lequel il est formé, & la tangente de cet angle étant $= \phi$, le secteur $= \frac{1}{2}u$, nous venons de voir qu'il est

$$2u = \log \frac{1 + t\phi}{1 - t\phi}.$$

§. 85. Soient donc trois secteurs $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{2}u'$, $\frac{1}{2}u''$, tels que le troisième soit la somme des deux premiers. Soient de plus les angles répondans ϕ , ϕ' , ϕ'' . Et il fera

$$2u = \log \frac{1 + t\phi}{1 - t\phi},$$

$$2u' = \log \frac{1 + t\phi'}{1 - t\phi'},$$

$$2u'' = \log \frac{1 + t\phi''}{1 - t\phi''}.$$

Comme donc il doit être

$$\frac{1}{2} u'' = \frac{1}{2} u' + \frac{1}{2} u,$$

il sera également

$$\log \frac{1 + t\phi''}{1 - t\phi''} = \log \frac{1 + t\phi'}{1 - t\phi'} + \log \frac{1 + t\phi}{1 - t\phi},$$

ce qui donne

$$\frac{1 + t\phi''}{1 - t\phi''} = \frac{1 + t\phi'}{1 - t\phi'} \cdot \frac{1 + t\phi}{1 - t\phi},$$

d'où il suit

$$t\phi'' = \frac{t\phi + t\phi'}{1 + t\phi \cdot t\phi'},$$

& réciproquement pour la différence

$$t\phi' = \frac{t\phi'' - t\phi}{1 - t\phi \cdot t\phi''}.$$

Ces deux formules ne diffèrent qu'à l'égard des signes de celles qu'on trouve pour les secteurs, ou les arcs circulaires, & elles nous laissent également conclure, que si les tangentes qui répondent à deux secteurs hyperboliques, sont rationnelles, les tangentes qui répondent au secteur égal à la somme & la différence de, ces deux secteurs seront pareillement rationnelles.

§. 86. Cette seule proposition suffit pour faire voir que tout ce que nous avons dit ci-dessus (§. 52 - - - 71.) à l'égard du cercle, s'appliquera également à l'hyperbole. On n'a qu'à se servir d'une façon abrégée de parler, en nommant *tangente d'un secteur hyperbolique* quelconque ACMA, la tangente de l'angle ACM, qui est = AT, le rayon AC étant posé = 1. Ensuite il faut observer que tous les secteurs dont il s'agit ici, doivent avoir l'axe AC pour leur commun commencement, comme l'ont les secteurs MCAM, mCAm. Ainsi p. ex. le secteur mCM ne touchant point à l'axe, il faut lui en sub-



substituer un autre qui lui soit égal, & qui soit contigu à l'axe AC, lorsqu'on veut avoir l'angle Φ & la tangente qui lui répond. On voit bien que cette remarque n'étoit point nécessaire lorsqu'il s'agissoit du cercle, parce que chaque diamètre du cercle peut être regardé comme axe.

§. 87. C'est donc dans ce sens, que je dirai que *l'hyperbole a une infinité de tangentes premières, que les secteurs de toutes ces tangentes premières sont incommensurables entre eux & à l'unité, que la tangente d'un secteur étant première, il n'y a que les tangentes des multiples de ce secteur qui soient rationnelles* : Que toute tangente rationnelle est ou première elle-même, ou son secteur est un multiple d'un secteur dont la tangente est première. &c. Comme la démonstration de ces théoremes ne feroit qu'une répétition de celles que j'ai données pour le cercle, je les omettrai d'autant plus que je ne rapporte ces théoremes, que pour faire voir encore en ce point l'analogie qu'il y a entre le cercle & l'hyperbole équilaterale.

§. 88. Comparons encore ensemble le secteur circulaire ANCA, & le secteur hyperbolique AMCA. Mr. de Foncenex, dans le Mémoire cité ci-dessus (§. 74.) a fait voir, qu'en employant les quantités imaginaires, ces deux secteurs se trouvent être dans le rapport de 1 à $\sqrt{-1}$, qui est purement imaginaire. Or voions quel sera le rapport réel? C'est ce que nous trouverons en exprimant l'un de ces secteurs par l'autre. Pour cet effet nous employerons les deux suites

$$v = t\Phi - \frac{1}{3}t\Phi^3 + \frac{1}{5}t\Phi^5 - \frac{1}{7}t\Phi^7 + \&c.$$

$$t\Phi = v - \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 - \frac{1}{315}u^7 + \&c.$$

qu'on trouve facilement moyennant les formules différentielles données ci-dessus (§. 75.). Substituant donc la valeur de la seconde de ces suites dans la première, on aura, toute réduction faite,

$$v = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{2}{3}u^5 - \frac{2}{315}u^7 + \&c.$$



& réciproquement

$$u = v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{3}v^5 + \frac{2}{3}\frac{4}{1}\frac{4}{3}v^7 + \&c.$$

Ces deux suites ne diffèrent que par rapport aux signes, les coefficients & les exposans étant les mêmes. Si dans la première de ces suites on pose

$$u = v \sqrt{-1},$$

on trouve

$$v = \sqrt{-1} \cdot (v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{3}v^5 + \frac{2}{3}\frac{4}{1}\frac{4}{3}v^7 + \&c.)$$

ce qui veut dire

$$v = u \sqrt{-1}.$$

Donc, moyennant un secteur hyperbolique imaginaire, on trouve un secteur circulaire imaginaire, & réciproquement.

§. 89. Tout ce que je viens de faire voir sur les quantités transcendentes circulaires & logarithmiques, paroît être fondé sur des principes beaucoup plus universels, mais qui ne sont pas encore assez développés. Voici cependant ce qui pourra servir à en donner quelque idée. Il ne suffit pas d'avoir trouvé que ces quantités transcendentes sont irrationnelles, c'est à dire incommensurables à l'unité. Cette propriété ne leur est pas unique. Car, outre qu'il y a des quantités irrationnelles qu'on pourra former au hazard, & qui par là même ne sont gueres du ressort de l'analyse, il y en a encore une infinité d'autres qu'on nomme *algébriques*: & telles sont toutes les *quantités irrationnelles radicales*, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ &c. $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ &c. & toutes les *racines irrationnelles des équations algébriques*, comme p. ex. celles des équations

$$0 = xx - 4x + 1,$$

$$0 = x^3 - 5x + 1,$$

&c.



Je nommerai les unes & les autres *quantités irrationnelles radicales*, & voici le théoreme, que je crois pouvoir être démontré.

§. 90. Je dis donc *qu'aucune quantité transcendente circulaire & logarithmique ne sauroit être exprimée par quelque quantité irrationnelle radicale, qui se rapporte à la même unité, & dans laquelle il n'entre aucune quantité transcendente.* Ce théoreme semble devoir être démontré de ce que les quantités transcendentes dépendent de

$$e^x,$$

où l'exposant est variable, au lieu que les quantités radicales supposent des exposans constans. Ainsi p. ex. un arc de cercle étant rationel ou commensurable au rayon, sa tangente, que nous avons vu être irrationnelle, ne sauroit être une racine quarrée de quelque quantité rationnelle. Car soit l'arc proposé $= \omega$, & faisons $\text{tang } \omega = \sqrt{a}$, nous aurons

$$\tan^2 \omega = \frac{\sin^2 \omega}{\cos^2 \omega} = \frac{1 - \cos 2\omega}{1 + \cos 2\omega} = a,$$

d'où il suit

$$\cos 2\omega = \frac{1 - a}{1 + a}.$$

or cette quantité étant rationnelle, il s'ensuit que l'arc 2ω est irrationnel, ce qui étant contre l'hypothese, il est clair qu'en faisant $\text{tang } \omega = \sqrt{a}$, la quantité a ne sauroit être rationnelle, & que partant la tangente d'un arc rationel quelconque n'est point une racine quarrée de quelque quantité rationnelle.

§. 91. Ce théoreme étant une fois démontré dans toute son universalité, il s'ensuivra que la circonférence du cercle ne pouvant être exprimée par quelque quantité radicale, ni par quelque quantité rationnelle, il n'y aura pas moyen de la déterminer par quelque construction géométrique. Car tout ce qu'on peut construire géométrique-



quement revient aux quantités rationnelles & radicales ; & il s'en faut même de beaucoup que ces dernières puissent indifféremment être construites. On voit bien qu'il en sera de même de tous les arcs de cercles dont la longueur ou les deux points extrêmes sont donnés, soit par des quantités rationnelles, soit par des quantités radicales. Car, si la longueur de l'arc est donnée, il faudra trouver ses deux points extrêmes, en y employant la corde, le sinus, la tangente, ou quelque autre ligne droite qui, pour pouvoir être construite, sera toujours dépendante ou réductible à une des lignes que je viens de nommer. Mais la longueur de l'arc étant donnée par des quantités rationnelles ou radicales, ces lignes seront transcendentes, & par là même irréductibles à quelque quantité rationnelle ou radicale. Il en sera de même si les deux points extrêmes de l'arc sont donnés, j'entens par des quantités rationnelles ou radicales. Car, dans ce cas, la longueur de l'arc sera une quantité transcendente : ce qui veut dire irréductible à quelque quantité rationnelle ou radicale, & par là elle n'admet aucune construction géométrique.



